2009 개정 교육과정
인천광역시교육감 인정
고교-04-149-04-13

고|등|학|교

기하와 벡터

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

교과서 물려주기 기록표

연도	교과서 사용자				상태
	학년	반	번호	이름	

※ 상태 표기 예시: 매우 좋음, 좋음, 보통, 나쁨

고|등|학|교

기하와 벡터

(주)지학사

들어가는 말



수학은 오랜 옛날부터 문명의 발달에 핵심적인 역할을 해왔으며 앞으로도 이와 같은 수학의 역할은 더욱 확대될 것이다. 특히 현재의 지식 정보화 사회에서의 신기술은 수학의 뒷받침 없이는 얻어질 수 없다. 실제로 수학은 우주, 항공, 컴퓨터 과학과 같은 자연 과학은 물론이고 경제, 경영 등과 같은 인문 · 사회 과학에도 폭넓게 이용되고 있다. 또한 현대 문명을 합리적으로 운영하고 발전시켜 21세기를 살아가는 우리에게 창조적이고 논리적인 아이디어를 제공하는 기초가 되고 있다.

수학을 공부하는 목적은 단순히 수학의 기본 지식을 습득하는 데에서 벗어나 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 해석함으로써 실생활의 여러 가지 문제에 적극적으로 대처하고 합리적이고 논리적으로 해결하는 능력을 기르는 데 있다.

이런 목적을 달성하기 위하여 이 책은 전인적 성장의 기반 위에 개성의 발달과 진로를 개척하는 사람, 기초 능력의 바탕 위에 새로운 발상과 도전으로 창의성을 발휘하는 사람, 문화적 소양과 다원적 가치에 대한 이해를 바탕으로 품격 있는 삶을 영위하는 사람, 세계와 소통하는 시민으로서 배려와 나눔의 정신으로 공동체 발전에 참여하는 사람을 육성하려는 마음가짐으로 새롭게 개정된 교육과정에 맞게 만들었다.

특히 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 학생의 추론 능력, 문제 해결 능력 그리고 의사소통 능력을 발달시킬 수 있도록 하였다.

둘째, 생각 열기를 통하여 자신을 둘러싼 세계에 대한 경험을 토대로 다양한 문화와 가치에 대한 이해를 넓히고, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 함으로써 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해할 수 있도록 하였다.

셋째, 심신의 건강하고 조화로운 발달을 추구하며, 다양한 분야의 경험과 지식을 익혀 적극적으로 진로를 탐색할 수 있도록 하였으며, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

본래 수학은 암기만으로는 좋은 학습 성과를 거둘 수 없고, 학생 스스로가 문제를 해결하고자 노력할 때 비로소 원리나 법칙 등이 심도 있게 이해되고 학습에 흥미도 느끼게 되는 과목이다. 이 책이 스스로 문제를 해결하려는 학생들에게 좋은 길잡이가 되기를 기대한다. 또 이 책으로 수학 실력을 키워 오늘날의 정보화와 세계화 시대에 걸맞은 창조적이고 지혜로운 사람으로 성장하기 바란다.



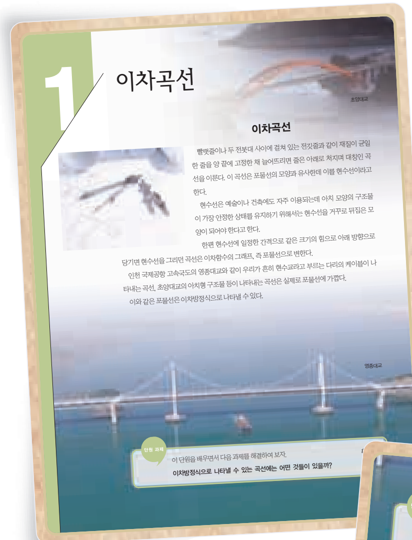
지은이 씀

이 책의 짜임새



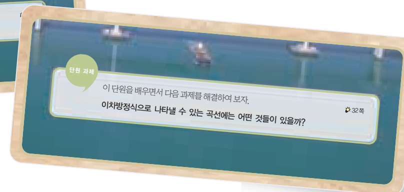
대단원 도입

단원과 관련된 사진을 제시하고 관련 내용을 소개함으로써 단원 학습의 흥미와 관심을 높였다. 또 앞서 배운 내용과 단원의 연계성 확인을 위한 문제를 제시하였다.



중단원 도입

새로운 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.



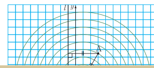
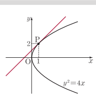





본문 전개

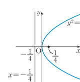
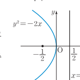
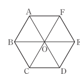
생각 열기 / 탐구 활동

본격적인 학습에 앞서 스토리텔링으로 흥미를 이끌어 내고, 새로 도입할 수학 원리의 탐구를 통해 학습 내용의 실마리를 제공하였다.

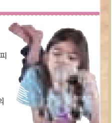
예제 / 문제

대표적인 유형의 문제로 개념 이해를 탄탄히 하고, 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.


창의 UP / 사고력 기르기 / 단원 과제

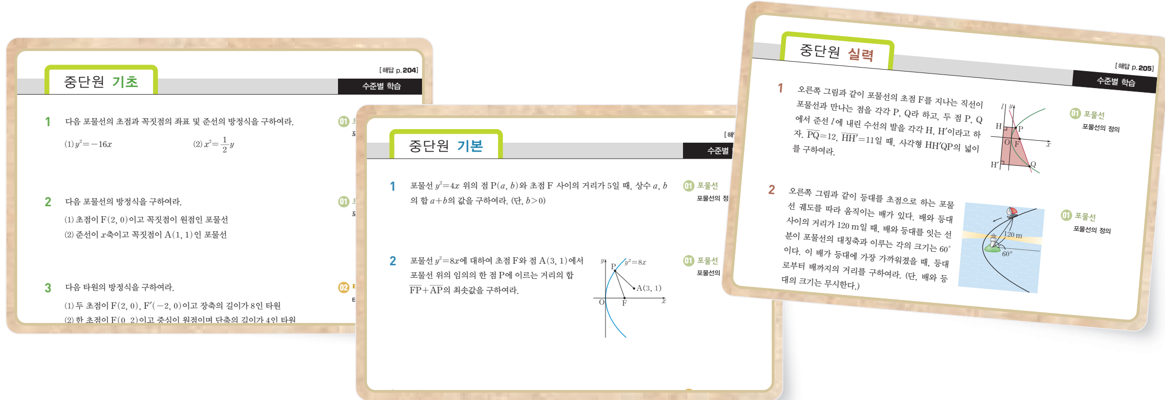
수학의 개념을 깊이 생각하고 표현함으로써 창의력을 높이며, 추론, 의사소통, 문제 해결의 세 유형으로 사고력을 기르고, 중단원 도입과 관련한 구체적인 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.





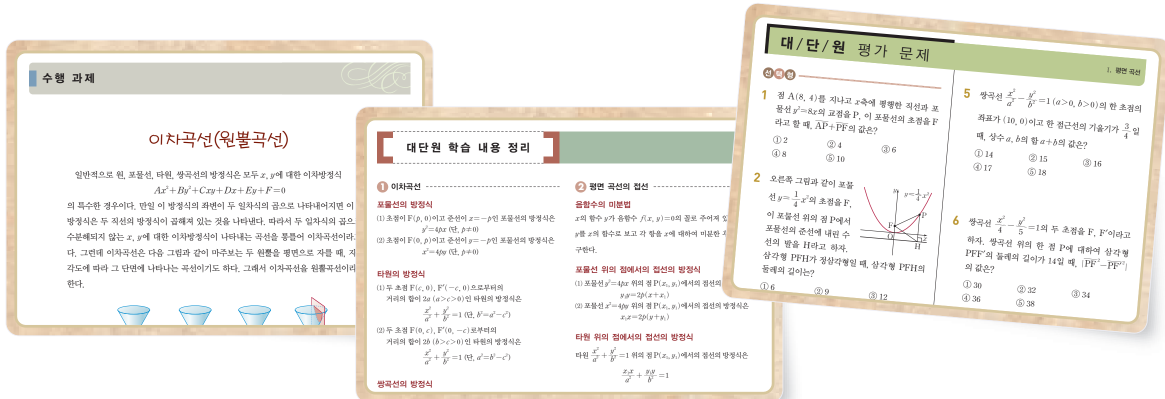
중단원 마무리

학생의 학습 수준에 맞추어 문제를 선택하여 풀게 함으로써 수준별 학습이 가능하도록 하였고, 문제와 관련된 소단원명과 학습 요소를 제시하여 본문과의 연계성을 살리고 학생 스스로 부족한 부분을 찾아 보충할 수 있도록 하였다.



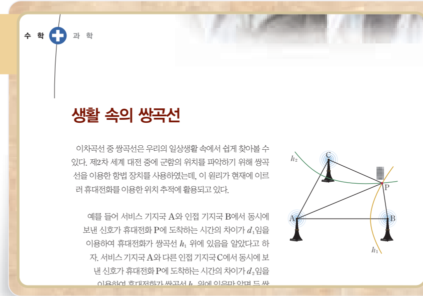
대단원 마무리

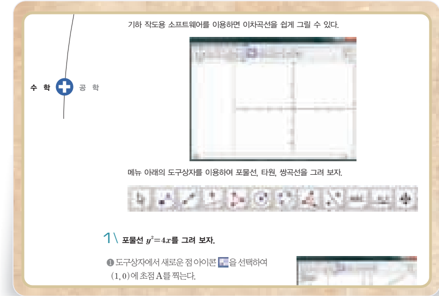
대단원 학습을 마친 후 다양한 주제에 대한 탐구로 종합적인 문제 해결력을 신장하도록 하였고, 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하여 학습 내용을 상기할 수 있도록 하였으며, 대단원 학습 내용을 총망라한 다양한 평가 문제를 제시하였다.



수학 플러스

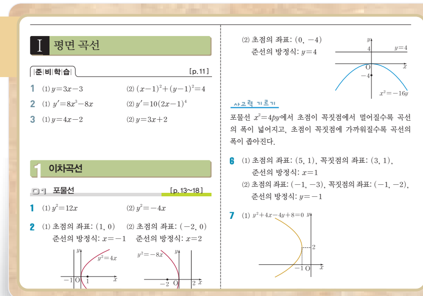
교육부에서 발표한 수학 교육 선진화 방안에서 강조하는 STEAM과 관련하여 수학과 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.





부록

교과서의 문제에 대한 해답과 본문에 등장한 수학 용어와 기호를 찾아보기로 제공하여 학습에 도움이 되도록 하였다.





교과서 속 아이콘 활용

중③ 선수 학습 내용

 계산기 활용 문제

 실생활 문제

 발전 문제

보기 구체적인 예시

주의 주의할 점

참고 참고할 사항



차례

Ⅰ 평면 곡선

Ⅱ 평면벡터









공간도형과 공간벡터



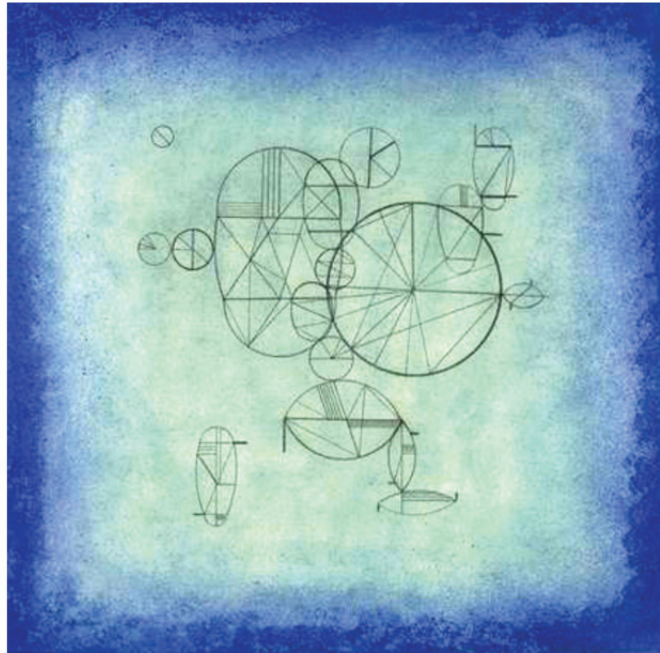
부록





원뿔에서 여러 가지 이차곡선을 찾아볼 수 있다.

평면 곡선



|준|비|학|습|

수학 I 도형의 방정식

1 다음 도형의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 (1, 0), (2, 3)을 지나는 직선

(2) 중심이 (1, 1)이고, 반지름의 길이가 2인 원

미적분 I 함수의 미분

2 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=2x^4-4x^2+1$ (2) $y=(2x-1)^5$

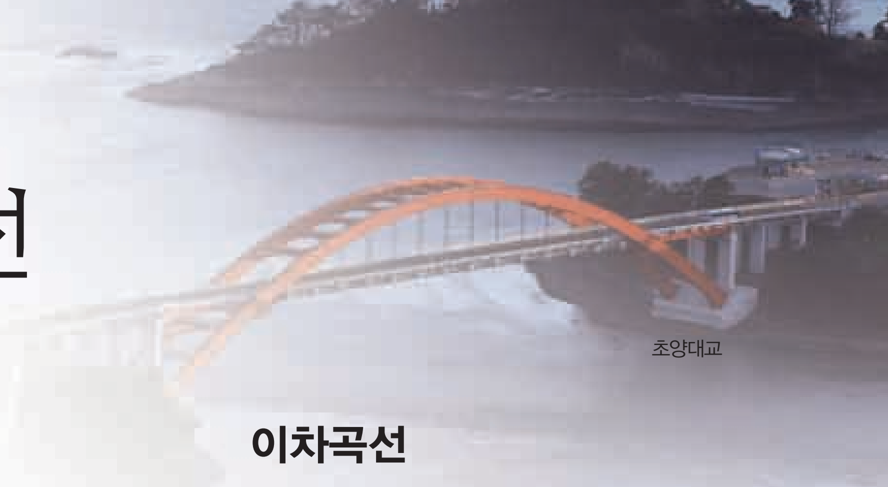
미적분 I 접선의 방정식

3 다음 곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=3x^2-2x+1$, P(1, 2) (2) $y=x^3$, P(−1, −1)

1

이차곡선


초양대교

이차곡선



빨랫줄이나 두 전봇대 사이에 걸쳐 있는 전깃줄과 같이 재질이 균일한 줄을 양 끝에 고정한 채 늘어뜨리면 줄은 아래로 처지며 대칭인 곡선을 이룬다. 이 곡선은 포물선의 모양과 유사한데 이를 현수선이라고 한다.

현수선은 예술이나 건축에도 자주 이용되는데 아치 모양의 구조물이 가장 안정한 상태를 유지하기 위해서는 현수선을 거꾸로 뒤집은 모양이 되어야 한다고 한다.

한편 현수선에 일정한 간격으로 같은 크기의 힘으로 아래 방향으로 당기면 현수선을 그리던 곡선은 이차함수의 그래프, 즉 포물선으로 변한다.

인천 국제공항 고속국도의 영종대교와 같이 우리가 흔히 현수교라고 부르는 다리의 케이블이 나타내는 곡선, 초양대교의 아치형 구조물 등이 나타내는 곡선은 실제로 포물선에 가깝다.

이와 같은 포물선은 이차방정식으로 나타낼 수 있다.


영종대교

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 32쪽

이차방정식으로 나타낼 수 있는 곡선에는 어떤 것들이 있을까?

01

포물선

● 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

포물선의 방정식은 어떻게 구하는가?

생각 열기

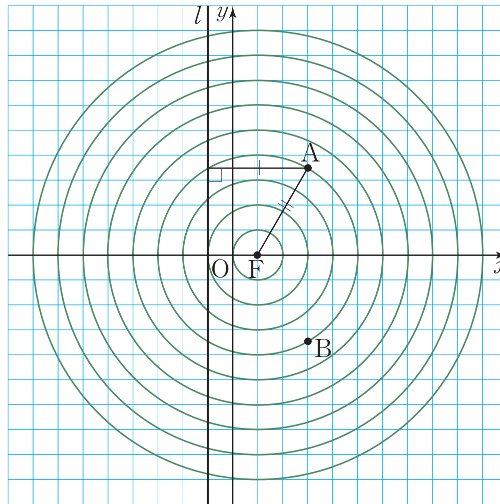
위성 안테나



'파라볼라 안테나'라고도 하는 움푹한 접시 모양의 위성 안테나는 포물선을 안테나의 축을 중심으로 회전시킨 모양으로 되어 있다. 전파가 위성 안테나의 축에 평행하게 들어온다면 모두 특정한 지점에 모이게 되므로 인공위성에서 날아온 전파가 약하더라도 효율적으로 모을 수 있다. 태양열 발전소 역시 위성 안테나 모양의 거울을 이용하여 태양열을 모아 전기를 만든다.

탐구 활동

위성 안테나의 단면은 동심원을 이용하여 그릴 수 있다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 각각 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$인 원과 반지름의 길이가 2인 원에 접하고 x축에 수직인 직선 l이 있다. 물음에 답하여 보자.



1. 점 A에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리는 4로 서로 같다. 점 B에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리를 각각 구하여 보자.

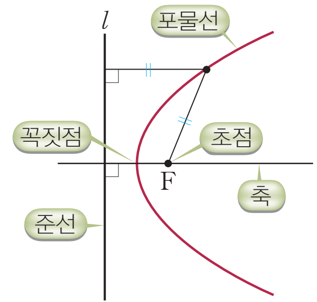
2. 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$로 서로 같은 점들을 찾아 그림에 표시하여 보자.

3. **2**에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

탐구 활동에서와 같이 평면 위의 한 점 F와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다.

이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 l을 포물선의 **준선**이라고 한다.

또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 축과 포물선의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.



포물선은 영어로 파라볼라(parabola)라고 한다.

0이 아닌 실수 p에 대하여 x축 위의 한 점 $F(p,\ 0)$을 초점으로 하고, 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구하여 보자.

포물선 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PH}$$

이므로

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$y^2=4px \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

수학 I 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.

점 $P(x,\ y)$와 직선 $x=k$ 사이의 거리는 $|x-k|$이다.

역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 $P(x,\ y)$와 점 $F(p,\ 0)$ 사이의 거리 $\overline{PF}$는

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-p)^2+y^2}=\sqrt{(x-p)^2+4px}=\sqrt{(x+p)^2}=|x+p|$$

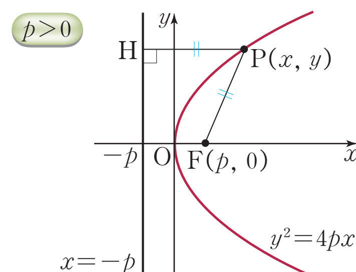
이고, 점 $P(x,\ y)$에서 직선 $x=-p$에 내린 수선의 발 H 사이의 거리 $\overline{PH}$는

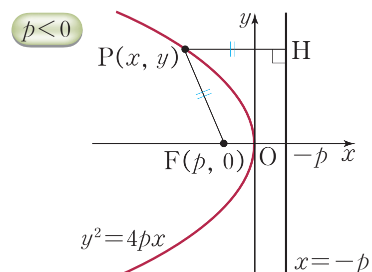
$$\overline{PH}=|x-(-p)|=|x+p|$$

이므로 $\overline{PF}=\overline{PH}$가 성립한다. 즉, 방정식 ①을 만족시키는 점 P는 초점이 $F(p,\ 0)$이고, 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점이 된다.

따라서 방정식 ①은 구하는 포물선의 방정식이다.

포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $y=0$이다.





이상을 정리하면 다음과 같다.

> **포물선의 방정식 [1]**
>
> 초점이 $F(p,\ 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은
>
> $$y^2=4px \text{ (단, } p\neq 0)$$

포물선 $y^2=4px$는 x축에 대하여 대칭이다.

보기 초점이 $F(2,\ 0)$이고 준선이 $x=-2$인 포물선의 방정식은
$y^2=4px$에서 $p=2$이므로 $y^2=8x$

문제 1 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 $F(3,\ 0)$이고 준선이 $x=-3$인 포물선

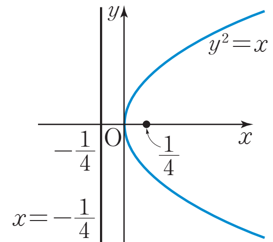
(2) 초점이 $F(-1,\ 0)$이고 준선이 $x=1$인 포물선

예제 01 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $y^2=x$　　　　(2) $y^2=-2x$

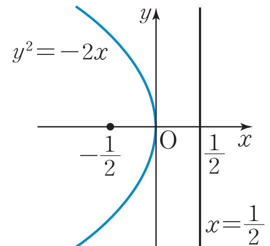
풀이 (1) $y^2=x$에서 $y^2=4\times\frac{1}{4}\times x$이므로 $p=\frac{1}{4}$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}$이다. 또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y^2=-2x$에서 $y^2=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times x$이므로 $p=-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$이다. 또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



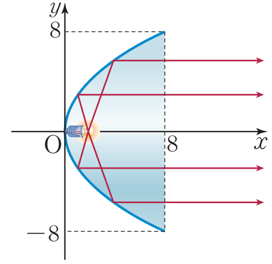
답 (1) 초점의 좌표: $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$, 준선의 방정식: $x=-\frac{1}{4}$

(2) 초점의 좌표: $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식: $x=\frac{1}{2}$

문제 2 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라.

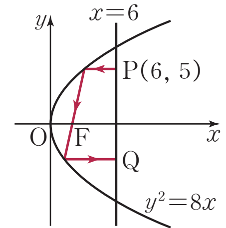
(1) $y^2=4x$　　　　(2) $y^2=-8x$

실생활 **문제 3** 손전등 반사경의 단면은 포물선 모양으로 되어 있다. 오른쪽 그림은 어느 손전등 반사경의 단면을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 전구의 위치가 포물선의 초점이라고 할 때, 초점의 좌표를 구하여라.



창의 up

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=6$ 위의 점 $P(6,\ 5)$에서 x축에 평행하게 출발한 빛이 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 향해 반사되고, 초점을 지나서 다시 포물선과 만나 x축에 평행하게 반사되어 직선 $x=6$ 위의 점 Q까지 도달하였다. 이때 빛이 진행한 거리를 구하는 방법을 설명하여라.



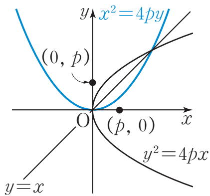
초점이 y축 위에 있고 준선이 x축에 평행한 포물선의 방정식에 대하여 알아보자.

방정식 $y^2=4px$를 구할 때와 같은 방법으로 0이 아닌 실수 p에 대하여 y축 위의 점 $F(0,\ p)$를 초점으로 하고, 직선 $y=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식은

$$x^2=4py$$

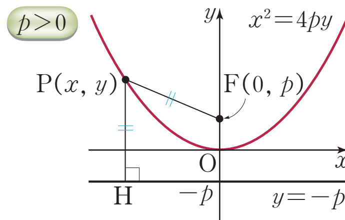
임을 알 수 있다.

- $x^2=4py$의 그래프는 $y^2=4px$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와도 같다.

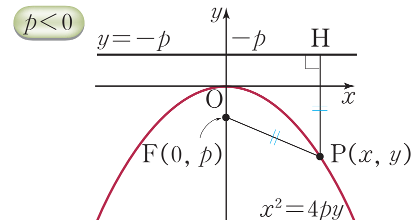


- 포물선 $x^2=4py$의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $x=0$이다.

$p>0$



$p<0$



이상을 정리하면 다음과 같다.

- 포물선 $x^2=4py$는 y축에 대하여 대칭이다.

포물선의 방정식 [2]

초점이 $F(0,\ p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

$$x^2=4py \ (\text{단, } p\neq0)$$

보기 초점이 $F(0,\ -2)$이고 준선이 $y=2$인 포물선의 방정식은

$x^2=4py$에서 $p=-2$이므로 $x^2=-8y$

문제 4 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 1)$이고 준선이 $y=-1$인 포물선

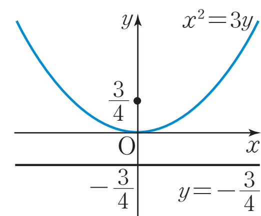
(2) 초점이 $\mathrm{F}(0,\ -3)$이고 준선이 $y=3$인 포물선

예제 02 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $x^2=3y$　　(2) $x^2=-4y$

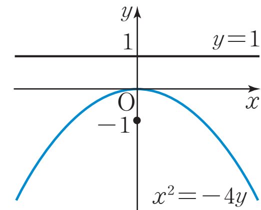
풀이 (1) $x^2=3y$에서 $x^2=4\times\frac{3}{4}\times y$이므로 $p=\frac{3}{4}$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$이고 준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}$이다. 또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $x^2=-4y$에서 $x^2=4\times(-1)\times y$이므로 $p=-1$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(0,\ -1)$이고 준선의 방정식은 $y=1$이다. 또 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 (1) 초점의 좌표: $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$, 준선의 방정식: $y=-\frac{3}{4}$

(2) 초점의 좌표: $(0,\ -1)$, 준선의 방정식: $y=1$

문제 5 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $x^2=2y$　　(2) $x^2=-16y$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

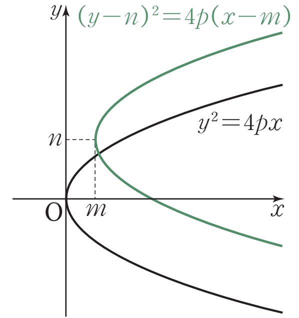
포물선 $x^2=4py$에서 초점이 꼭짓점으로부터 멀어지거나 가까워짐에 따라 곡선의 모양은 어떻게 변하는지 토의하여 보자.

포물선의 평행이동에 대하여 알아보자.

꼭짓점이 원점이고, x축을 축으로 하는 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 포물선

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이 된다.



방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$f(x-m, y-n)=0$

이때 꼭짓점의 좌표는 (m, n), 초점의 좌표는 $(p+m, n)$이고, 준선의 방정식은 $x=-p+m$이다.

이와 마찬가지로 포물선 $(x-m)^2=4p(y-n)$의 꼭짓점의 좌표는 (m, n), 초점의 좌표는 $(m, p+n)$이고, 준선의 방정식은 $y=-p+n$이다.

문제 6 다음 포물선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 준선의 방정식을 구하여라.

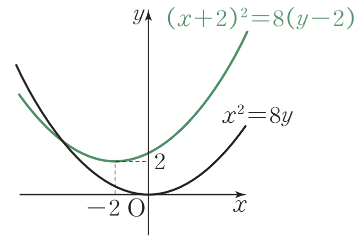
(1) $(y-1)^2=8(x-3)$　　　　(2) $(x+1)^2=-4(y+2)$

예제 03 방정식 $x^2+4x-8y+20=0$이 나타내는 도형을 그려라.

풀이 방정식 $x^2+4x-8y+20=0$을 변형하면

$$(x+2)^2=8(y-2)$$

이는 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 7 다음 방정식이 나타내는 도형을 그려라.

(1) $y^2+4x-4y+8=0$　　　　(2) $x^2-2x-2y+3=0$

발전

문제 8 초점이 $\mathrm{F}(2, 1)$이고 준선이 $y=3$인 포물선의 방정식을 구하여라.

02

타원

● 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

타원의 방정식은 어떻게 구하는가?

생각 열기

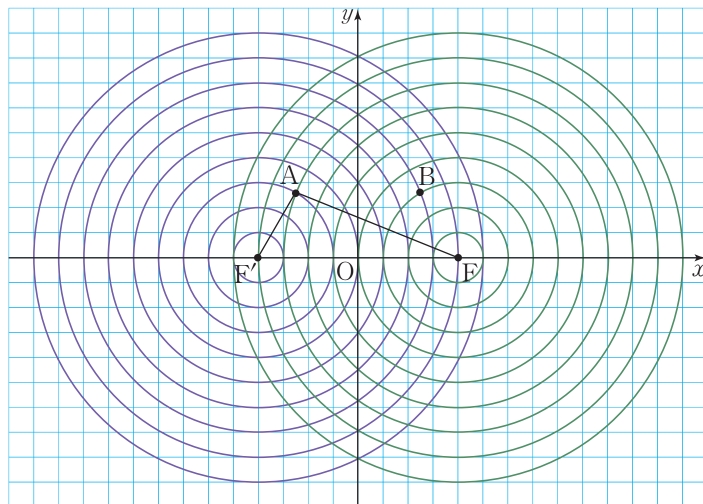
세인트 폴 대성당



영국 런던에 있는 세인트 폴 대성당의 '속삭이는 회랑'은 특정한 곳에서 작은 소리로 속삭이면 그 소리가 멀리 떨어진 다른 특정한 곳에서 또렷하게 들리는 신기한 장소이다. 이 현상은 속삭이는 회랑의 어느 특정한 곳에서 이야기하면 그 소리가 천장에 반사된 후 또 다른 특정한 곳으로 모이기 때문에 발생한다.

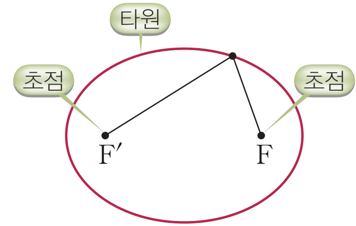
탐구 활동

속삭이는 회랑의 천장의 단면은 원을 이용하여 그릴 수 있다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 각각 점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, 점 $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 각각 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$인 원이 있다. 물음에 답하여 보자.



1. 점 A는 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 10인 점이다. 점 B에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 합을 구하여 보자.
2. 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 10인 점들을 찾아 그림에 표시하여 보자.
3. 2에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

탐구 활동에서와 같이 평면 위의 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 **타원**이라고 하며, 두 점 F, F′을 타원의 **초점**이라고 한다.



타원은 영어로 엘립스(ellipse)라고 한다.

먼저 x축 위의 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$을 초점으로 하고, 두 초점 F, F′으로부터의 거리의 합이 $2a(a>c>0)$인 타원의 방정식을 구하여 보자.

타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$$

이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

이다. 여기서 $a>c>0$이므로 $b^2=a^2-c^2\ (b>0)$으로 놓으면

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

이다. 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$와 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ 사이의 거리를 각각 구하여서 더하여 보면 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$가 성립한다. 즉, 점 P는 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$인 타원 위의 점이 된다.

따라서 방정식 ①은 구하는 타원의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이다.

타원의 방정식 [1]

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a\ (a>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } b^2=a^2-c^2)$$

보기 두 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 10인 타원의 방정식은 $2a=10$에서 $a=5$이고, $c=4$에서 $b^2=a^2-c^2=25-16=9$이므로 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

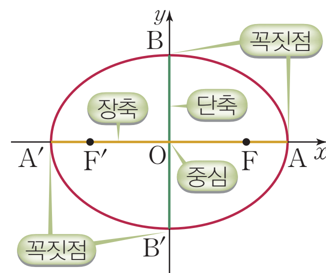
문제 1 다음 타원의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점 F$(2, 0)$, F$'(-2, 0)$으로부터의 거리의 합이 6인 타원

(2) 두 초점 F$(3, 0)$, F$'(-3, 0)$으로부터의 거리의 합이 10인 타원

오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(a, 0),\ \mathrm{A}'(-a, 0),$$
$$\mathrm{B}(0, b),\ \mathrm{B}'(0, -b)$$



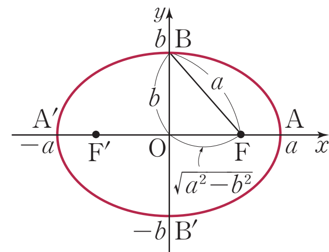
이다. 이때 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 **꼭짓점**, $\overline{\mathrm{AA}'}$을 타원의 **장축**, $\overline{\mathrm{BB}'}$을 타원의 **단축**이라고 하며, 장축과 단축의 교점을 타원의 **중심**이라고 한다.

타원은 장축과 단축 및 중심에 대하여 대칭이고, 두 초점은 장축 위에 있다.

또 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.

한편 $c^2=a^2-b^2$이므로 타원의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2}, 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$$



예제 01 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그려라.

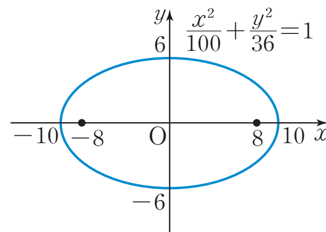
풀이 $a=10$, $b=6$이므로 $c=\sqrt{10^2-6^2}=8$

따라서 초점의 좌표는 $(8, 0)$, $(-8, 0)$

장축의 길이는 $2a=20$

단축의 길이는 $2b=12$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(10, 0)$, $(-10, 0)$, $(0, 6)$, $(0, -6)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 초점의 좌표: $(8, 0)$, $(-8, 0)$
장축의 길이: 20, 단축의 길이: 12

문제 2 다음 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그려라.

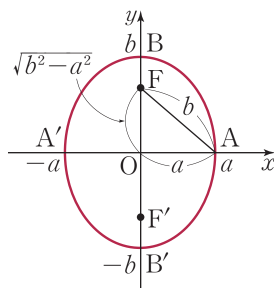
(1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (2) $9x^2+25y^2=225$

이제 두 초점이 y축 위에 놓여 있는 타원의 방정식에 대하여 알아보자.

앞에서와 같은 방법으로 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터의 거리의 합이 $2b\ (b>c>0)$인 타원의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } a^2=b^2-c^2)$$

이때 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$이 x축, y축과 만나는 점, 즉 꼭짓점을 A, A′, B, B′이라고 하면 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB'}}=2b$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA'}}=2a$이다.



한편 $c^2=b^2-a^2$이므로 타원의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원의 방정식 [2]

두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터의 거리의 합이 $2b\ (b>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } a^2=b^2-c^2)$$

보기 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 2)$, $\mathrm{F}'(0,\ -2)$로부터의 거리의 합이 8인 타원의 방정식은

$2b=8$에서 $b=4$이고, $c=2$에서 $a^2=b^2-c^2=16-4=12$이므로 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$

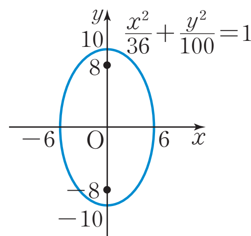
문제 3 다음 타원의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 5)$, $\mathrm{F}'(0,\ -5)$로부터의 거리의 합이 12인 타원

(2) 두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 4)$, $\mathrm{F}'(0,\ -4)$이고 장축의 길이가 10인 타원

예제 02 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그려라.

풀이 $a=6$, $b=10$이므로 $c=\sqrt{10^2-6^2}=8$
따라서 초점의 좌표는 $(0, 8)$, $(0, -8)$
장축의 길이는 $2b=20$
단축의 길이는 $2a=12$
이때 꼭짓점의 좌표는 $(6, 0)$, $(-6, 0)$, $(0, 10)$, $(0, -10)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 초점의 좌표: $(0, 8)$, $(0, -8)$
장축의 길이: 20, 단축의 길이: 12

문제 4 다음 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

(2) $4x^2+y^2=4$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점이 서로 멀어지거나 가까워짐에 따라 곡선의 모양은 어떻게 변하는지 토의하여 보자.

타원의 평행이동에 대하여 알아보자.

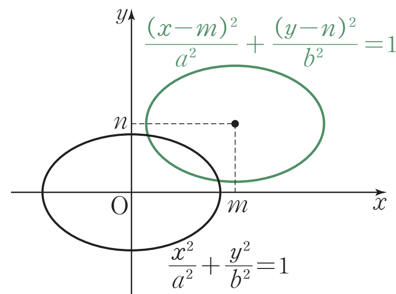
중심이 원점에 있는 타원

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 중심이 (m, n)인 타원

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이 된다. 이때 두 초점과 꼭짓점의 좌표는 바뀌지만 장축과 단축의 길이는 변하지 않는다.



문제 5 다음 타원의 초점과 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

(1) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$

(2) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

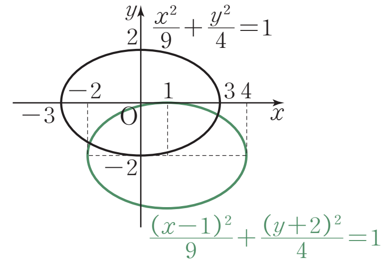
예제 03 방정식 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$이 나타내는 도형을 그려라.

풀이 $4(x^2-2x)+9(y^2+4y)+4=0$에서

$$4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$$

따라서 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$이 된다.

이는 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 6 다음 방정식이 나타내는 도형을 그려라.

(1) $x^2+4y^2+4x-8y+4=0$

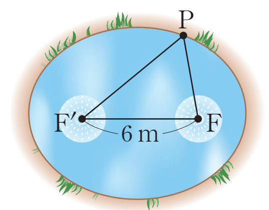
(2) $9x^2+4y^2+18x-27=0$

발전

문제 7 두 초점이 $\mathrm{F}(1,\ 6)$, $\mathrm{F}'(1,\ 0)$이고 장축의 길이가 8인 타원의 방정식을 구하여라.

창의 up

오른쪽 그림과 같은 타원 모양의 연못이 있다. 타원의 두 초점 F, F′의 위치에 있는 두 분수대 사이의 거리는 6 m이다. 연못의 둘레의 한 점 P에서 두 분수대까지의 거리의 합이 10 m일 때, 삼각형 PF′F의 넓이의 최댓값을 구하는 방법을 설명하여라.



03 쌍곡선

● 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

쌍곡선의 방정식은 어떻게 구하는가?

생각 열기

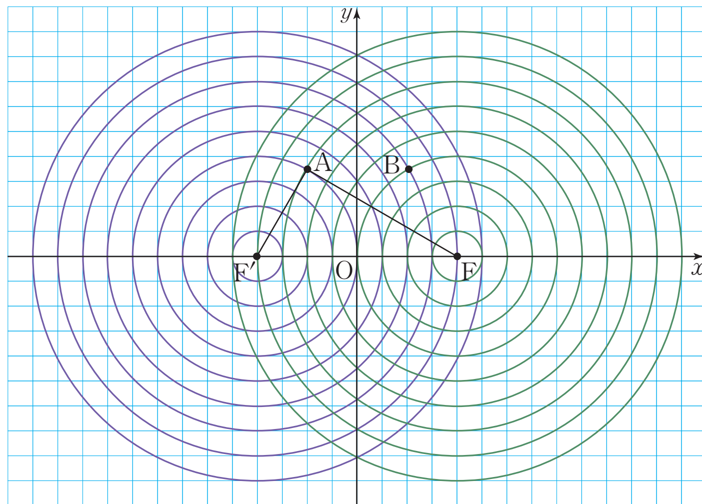
항법 장치(Navigation Equipment)



제2차 세계 대전 중에 먼 바다를 항해하는 군함의 위치를 정확하게 파악하기 위하여, 멀리 떨어진 두 기지에서 군함으로 동시에 전파를 보낸 후 두 전파가 군함에 도달하는 데 걸린 시간의 차를 이용하는 항법 장치가 고안되었다. 요즘은 인공위성을 이용하여 입체적으로 위치를 추적할 수 있는 장치가 많이 개발되었으며, 자동차에 장착하여 사용할 정도로 널리 보급되었다.

탐구 활동

군함의 위치를 파악하는 항법 장치의 원리는 원을 이용하여 나타낼 수 있다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 각각 점 F(4, 0), 점 F′(−4, 0)이고, 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, ⋯, 9인 원이 있다. 물음에 답하여 보자.



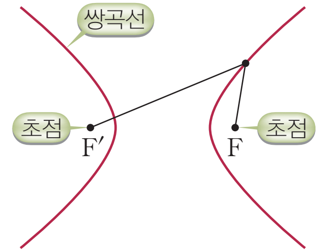
1. 점 A는 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 3인 점이다. 점 B에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 차를 구하여 보자.

2. 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 3인 점들을 찾아 그림에 표시하여 보자.

3. **2**에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

쌍곡선은 영어로 하이퍼볼라(hyperbola)라고 한다.

탐구 활동에서와 같이 평면 위의 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 **쌍곡선**이라고 하며, 두 점 F, F′을 쌍곡선의 **초점**이라고 한다.



먼저 x축 위의 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고, 두 초점 F, F′으로부터의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구하여 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$$

이므로

$$|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

$$cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

이다. 여기서 $c>a>0$이므로 $b^2=c^2-a^2$ $(b>0)$으로 놓으면

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

이다. 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$와 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ 사이의 거리를 각각 구하여서 차를 구하여 보면 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$가 성립한다. 즉, 점 P는 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$인 쌍곡선 위의 점이 된다.

따라서 방정식 ①은 구하는 쌍곡선의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이다.

쌍곡선의 방정식 [1]

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } b^2=c^2-a^2)$$

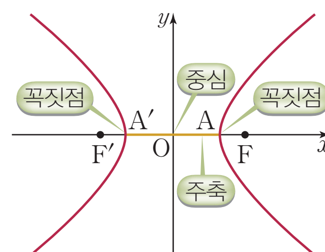
보기 두 초점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선의 방정식은

$2a=4$에서 $a=2$이고, $c=3$에서 $b^2=c^2-a^2=3^2-2^2=5$이므로 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

문제 1 다음 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점 F$(6, 0)$, F$'(-6, 0)$으로부터의 거리의 차가 10인 쌍곡선

(2) 두 초점 F$(2, 0)$, F$'(-2, 0)$으로부터의 거리의 차가 2인 쌍곡선



오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 x축과 만나는 점의 좌표는

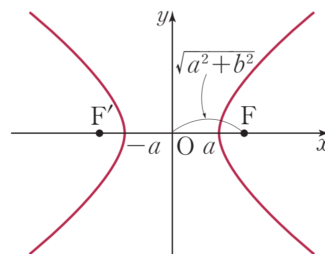
$$\mathrm{A}(a, 0),\ \mathrm{A}'(-a, 0)$$

이다. 이때 두 점 A, A′을 쌍곡선의 **꼭짓점**, $\overline{\mathrm{AA}'}$을 쌍곡선의 **주축**, $\overline{\mathrm{AA}'}$의 중점을 쌍곡선의 **중심**이라고 한다.

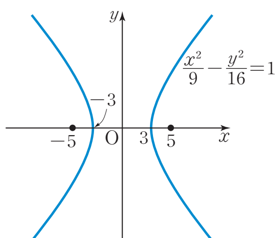
또 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$이다.

한편 $c^2=a^2+b^2$이므로 쌍곡선의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2}, 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$$



예제 01 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하여라.



풀이 $a=3$, $b=4$이므로 $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 초점의 좌표는 $(5, 0)$, $(-5, 0)$

주축의 길이는 $2a=6$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$이다.

답 초점의 좌표: $(5, 0)$, $(-5, 0)$

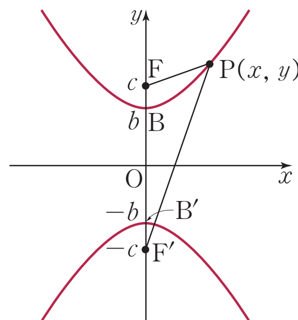
주축의 길이: 6

문제 2 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이를 구하여라.

(1) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ (2) $x^2-y^2=4$

이제 두 초점이 y축 위에 놓여 있는 쌍곡선의 방정식에 대하여 알아보자.

앞에서와 같은 방법으로 두 초점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구하면 다음과 같다.



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } a^2=c^2-b^2)$$

이때 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$이 y축과 만나는 점, 즉 꼭짓점의 좌표는

$$\mathrm{B}(0, b), \mathrm{B}'(0, -b)$$

이고, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.

한편 $c^2=a^2+b^2$이므로 쌍곡선의 두 초점 F, F′의 좌표를 a, b로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{F}(0, \sqrt{a^2+b^2}), \mathrm{F}'(0, -\sqrt{a^2+b^2})$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선의 방정식 [2]

두 초점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } a^2=c^2-b^2)$$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$을 켤레쌍곡선이라고 한다.

보기 두 초점 $\mathrm{F}(0, 3)$, $\mathrm{F}'(0, -3)$으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선의 방정식은

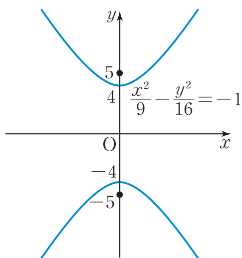
$2b=4$에서 $b=2$이고, $c=3$에서 $a^2=c^2-b^2=9-4=5$이므로 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

문제 3 다음 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0, 5)$, $\mathrm{F}'(0, -5)$로부터의 거리의 차가 6인 쌍곡선

(2) 두 초점이 $\mathrm{F}(0, 7)$, $\mathrm{F}'(0, -7)$이고 주축의 길이가 12인 쌍곡선

예제 02 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하여라.



풀이 $a=3$, $b=4$이므로 $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 5)$, $(0, -5)$

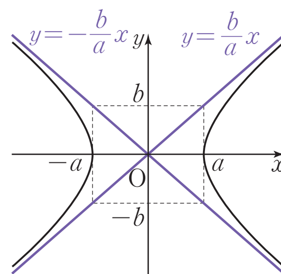
주축의 길이는 $2b=8$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$, $(0, -4)$이다.

답 초점의 좌표: $(0, 5)$, $(0, -5)$
주축의 길이: 8

문제 4 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이를 구하여라.

(1) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=-1$ (2) $x^2-y^2=-1$



쌍곡선의 방정식

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

을 y에 대하여 풀면

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

이다. 여기서 $|x|$의 값이 한없이 커지면 $\frac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 두 직선 $y=\frac{b}{a}x$와 $y=-\frac{b}{a}x$에 한없이 가까워진다. 이 두 직선을 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 **점근선**이라고 한다.

같은 방법으로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

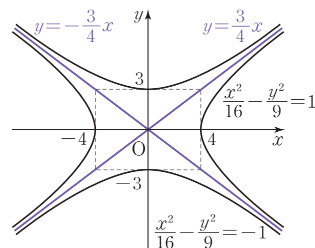
쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

보기 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$과 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$의 점근선의 방정식은 $a=4$, $b=3$이므로

$$y=\pm\frac{3}{4}x$$



문제 5 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하고, 쌍곡선과 점근선의 그래프를 그려라.

(1) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ (2) $x^2-y^2=-9$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점이 서로 멀어지거나 가까워짐에 따라 곡선의 모양은 어떻게 변하는지 토의하여 보자.

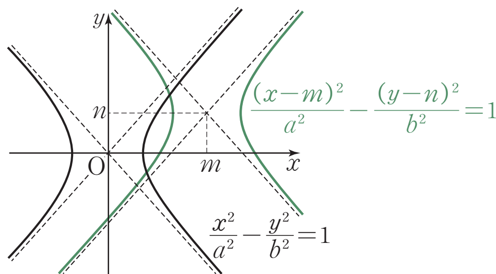
쌍곡선의 평행이동에 대하여 알아보자.

중심이 원점에 있는 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 중심이 (m, n)인 쌍곡선

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$



이 된다. 이때 두 초점과 꼭짓점의 좌표는 바뀌지만 주축의 길이는 변하지 않는다.

문제 6 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

(1) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$　　(2) $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=-1$

예제 03 방정식 $4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$이 나타내는 도형을 그려라.

풀이 $4(x^2-2x)-9(y^2+4y)-68=0$에서

$4(x-1)^2-9(y+2)^2=36$

따라서 $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$이 된다.

이는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$

문제 7 다음 방정식이 나타내는 도형을 그려라.

(1) $x^2-4y^2+4x+8y-4=0$　　(2) $x^2-y^2-6x+4y+9=0$

발전

문제 8 두 초점 $\mathrm{F}(1,\ 8)$, $\mathrm{F}'(1,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 6인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

창의 up

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{F'PF}$의 이등분선이 x축과 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서 만날 때, 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 둘레의 길이를 구하는 방법을 설명하여라.

이차곡선이란 무엇인가?

- 이차곡선으로 나타나지 않는 x, y에 대한 이차방정식
① $x^2+y^2=0$
오직 한 점, 즉 원점을 나타낸다.
② $(ax+by+c)(dx+ey+f)=0$
두 직선 $ax+by+c=0$, $dx+ey+f=0$을 나타낸다.
③ $x^2+y^2+1=0$
점, 직선, 곡선으로 나타낼 수 없다.

앞에서 배운 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 x, y에 대한 이차방정식으로 나타내어진다.

일반적으로 계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

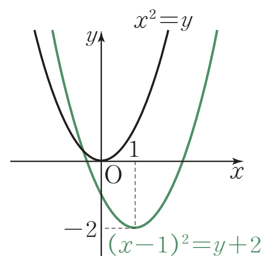
으로 나타내어지는 곡선을 **이차곡선**이라고 한다.

예제 04 방정식 $x^2-2x-y-1=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

풀이 방정식 $x^2-2x-y-1=0$을 변형하면

$$(x-1)^2=y+2$$

따라서 이 방정식은 축이 y축인 포물선 $x^2=y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선을 나타낸다.



답 포물선

문제 9 다음 방정식은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

(1) $2x^2+y^2-18=0$

(2) $3x^2-y^2-6x+4y-4=0$

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

이차곡선을 좌표평면 위에 나타내면 각각의 방정식은 모두 이차방정식 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$의 꼴로 나타내어진다.

> 원: $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$, 포물선: $(x-m)^2=4p(y-n)$, $(y-n)^2=4p(x-m)$,
> 타원: $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$, 쌍곡선: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1$

이차곡선 $x^2-5y^2+4x-1=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

[해답 p.204]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 포물선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 준선의 방정식을 구하여라.

(1) $y^2=-16x$　　　(2) $x^2=\frac{1}{2}y$

01 포물선
포물선의 방정식

2 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선

(2) 준선이 x축이고 꼭짓점이 $\mathrm{A}(1,\ 1)$인 포물선

01 포물선
포물선의 평행이동

3 다음 타원의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이고 장축의 길이가 8인 타원

(2) 한 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 2)$이고 중심이 원점이며 단축의 길이가 4인 타원

02 타원
타원의 방정식

4 다음 타원의 두 초점과 꼭짓점의 좌표 및 장축, 단축의 길이를 구하여라.

(1) $x^2+4y^2=4$　　　(2) $3x^2+2y^2=6$

02 타원
타원의 장축과 단축

5 다음 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선

(2) 한 꼭짓점이 $\mathrm{A}(0,\ 2)$이고 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{2}{3}x$인 쌍곡선

03 쌍곡선
쌍곡선의 방정식

6 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표 및 주축의 길이와 점근선의 방정식을 구하여라.

(1) $x^2-2y^2=2$　　　(2) $3x^2-2y^2=-6$

03 쌍곡선
쌍곡선의 점근선

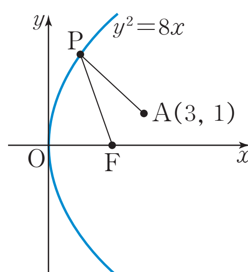
[해답 p.205]

중단원 기본

1 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 초점 F 사이의 거리가 5일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

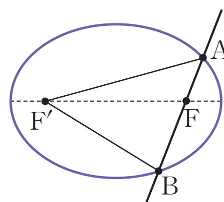
01 포물선
포물선의 정의

2 포물선 $y^2=8x$에 대하여 초점 F와 점 $\mathrm{A}(3, 1)$에서 포물선 위의 임의의 한 점 P에 이르는 거리의 합 $\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값을 구하여라.



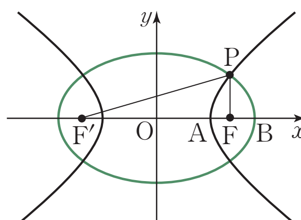
01 포물선
포물선의 정의

3 오른쪽 그림과 같은 타원에서 초점은 F, F′이고, 장축의 길이는 10이다. 초점 F를 지나는 직선이 타원과 만나는 두 점을 A, B라고 할 때, 삼각형 AF′B의 둘레의 길이를 구하여라.



02 타원
타원의 정의

4 오른쪽 그림과 같이 두 초점 F, F′을 공유하는 타원과 쌍곡선의 한 교점을 P, 쌍곡선과 타원이 x축의 양의 부분과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=4$, $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

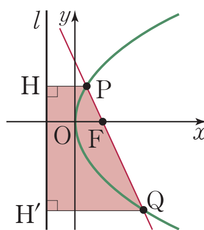


02 타원 03 쌍곡선
타원과 쌍곡선의 정의

5 쌍곡선 $x^2-3y^2=3$의 두 점근선이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

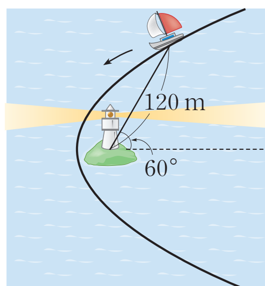
03 쌍곡선
쌍곡선의 점근선

1 오른쪽 그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하자. $\overline{PQ}=12$, $\overline{HH'}=11$일 때, 사각형 HH′QP의 넓이를 구하여라.



01 포물선
포물선의 정의

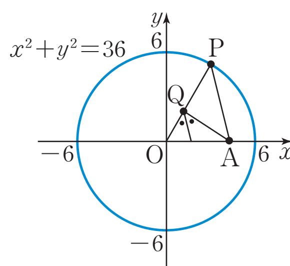
2 오른쪽 그림과 같이 등대를 초점으로 하는 포물선 궤도를 따라 움직이는 배가 있다. 배와 등대 사이의 거리가 120 m일 때, 배와 등대를 잇는 선분이 포물선의 대칭축과 이루는 각의 크기는 60°이다. 이 배가 등대에 가장 가까워졌을 때, 등대로부터 배까지의 거리를 구하여라. (단, 배와 등대의 크기는 무시한다.)



01 포물선
포물선의 정의

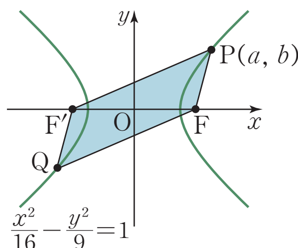
3 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 $P(a, b)$ $(b\neq0)$와 점 $A(4, 0)$에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 점 Q를 나타내는 방정식을 구하여라.

- 점 Q는 선분 OP 위에 있다.
- 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 $\angle OQA$를 이등분한다.



02 타원
타원의 평행이동

4 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 꼭짓점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 $P(a, b)$와 원점에 대하여 대칭인 점을 Q라고 하자. 사각형 F′QFP의 넓이가 30일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.



03 쌍곡선
쌍곡선의 정의

2

평면 곡선의 접선

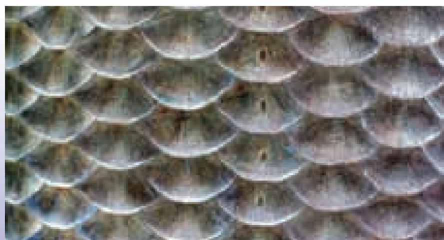
사이클로이드(cycloid)



사이클로이드는 바퀴라는 의미의 그리스 어에서 나온 말로, 한 원이 직선 위를 굴러갈 때 이 원 위의 한 점이 그리는 자취이다. 원통의 가장자리에 발광 다이오드를 붙이고 굴리는 것을 카메라의 노출 시간을 길게 해서 촬영하면 사진에는 반원과 비슷한 모양의 곡선이 나타나게 되는데 이것이 사이클로이드이다.

자연 속에서 사이클로이드를 쉽게 찾을 수 있는데 독수리는 땅 위에 있는 들쥐나 토끼, 뱀 등 먹이를 잡으려고 낙하할 때, 신속한 사냥을 위해 직선이 아닌 사이클로이드와 가까운 곡선을 그리며 목표물로 향한다. 또 물고기의 비늘에도 사이클로이드 곡선이 숨어 있다. 그리고 우리나라 전통 가옥의 기와 역시 사이클로이드 곡선 모양을 하고 있어 비로 인한 목조 건물의 부식을 막을 수 있다.







단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 48쪽

사이클로이드 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있을까?

01

음함수의 미분

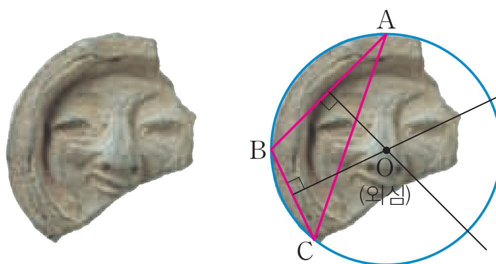
● 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

음함수는 어떻게 미분하는가?

생각 열기

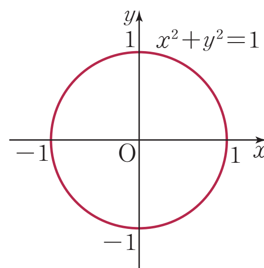
수막새를 복원하는 외심

기와지붕의 끝 부분 처마는 지붕 끝을 마무리하는 기와인 암막새와 수막새로 마감되어 있다. 7세기경의 신라 유물로 알려진 얼굴 무늬 수막새는 경주 영묘사지에서 완전한 모습이 아닌 이미 깨어진 모습으로 발굴되었다. 이렇게 원 모양이었던 얼굴 무늬 수막새를 복원하여 그 완전한 모습을 재현하려면 원의 중심을 찾아야 한다.



탐구 활동

오른쪽 그림은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 원의 방정식 $x^2+y^2=1$은 함수인지 아닌지 말하여 보자.

2. 원의 방정식 $x^2+y^2=1$에서 y를 x에 대하여 정리하여 보자.

3. **2**에서 얻은 결과는 함수인지 아닌지 말하여 보자.

원의 방정식 $x^2+y^2=1$은 구간 $(-1, 1)$에 속하는 임의의 x의 값에 대하여 대응되는 y의 값이 두 개이므로 y는 x에 대한 함수가 아니다. 그러나 y값의 범위를 $y \geq 0$ 또는 $y \leq 0$으로 정하면 y는 x에 대한 함수가 된다.

일반적으로 방정식 $f(x, y)=0$은 x와 y가 정의되는 구간을 적당히 정하면 y는 x에 대한 함수가 된다. 이와 같이 x에 대한 함수 y가 방정식 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y는 x의 **음함수** 꼴로 표현되었다고 한다.

예를 들어 $x^2+y^2-1=0$, $xy-1=0$은 각각 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, $y=\dfrac{1}{x}$의 음함수 표현이다.

이제 음함수 $x^2+y^2-1=0$의 도함수인 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여 보자.

앞에서 살펴본 바와 같이 y를 x에 대하여 나타내면 y를 x에 대한 함수로 이해할 수 있다. 따라서 양변을 x에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(1)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$2x+\frac{d}{dy}(y^2)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}(0)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (\text{단, } y\neq 0)$$

이다.

이와 같이 x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하는 것을 음함수의 미분법이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

음함수의 미분법은 $f(x, y)=0$을 $y=f(x)$의 꼴로 고치기 어려운 함수를 미분할 때 유용하게 사용된다.

음함수의 미분법

x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어져 있을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후에 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

예제 01 음함수 $2x^2+3y^2=6$의 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

풀이 y를 x에 대한 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(2x^2)+\frac{d}{dx}(3y^2)=\frac{d}{dx}(6)$$

$$4x+\frac{d}{dy}(3y^2)\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$4x+6y\frac{dy}{dx}=0$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{3y}$ (단, $y\neq 0$)

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{3y}$ (단, $y\neq 0$)

문제 1 다음 음함수의 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $x^2+xy+y^3=1$

(2) $y^2=x^2+2y-5$

(3) $x^3+y^3=xy$

(4) $x^2+3y^2=4xy$

음함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

예제 02 곡선 $x^2-2xy+2y^2=10$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 y를 x에 대한 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(2xy)+\frac{d}{dx}(2y^2)=\frac{d}{dx}(10)$$

$$2x-\left(2y+2x\frac{dy}{dx}\right)+4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(-2x+4y)\frac{dy}{dx}=-2x+2y$$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$ (단, $x\neq 2y$)

점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-(-1)}{2-2\times(-1)}=\frac{3}{4}$$

이므로 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{3}{4}(x-2) \text{ 즉, } y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$$

답 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$

문제 2 곡선 $x^2-\frac{x}{y}-2=0$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

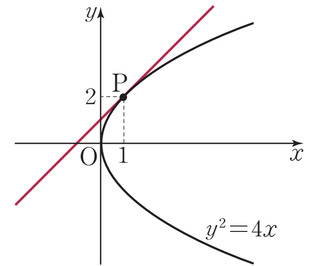
발전

문제 3 곡선 $x^3+y^3+axy+b=0$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{5}{8}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선을 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 판별식을 이용하여 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 구하여 보자.

2. 음함수의 미분법을 이용하여 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 구하여 보자.

3. **1**과 **2**의 결과를 비교하여 보자.

음함수의 미분법을 이용하여 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

포물선의 방정식 $y^2=4px$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2y\dfrac{dy}{dx}=4p$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}\ (\text{단, } y\neq0)$$

이다. 먼저 $y_1\neq0$일 때 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2p}{y_1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{2p}{y_1}(x-x_1)$$

$$y_1y-{y_1}^2=2p(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$${y_1}^2=4px_1 \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. ②를 ①에 대입하여 정리하면

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

이다.

한편 $y_1=0$일 때 접점이 $(0,\ 0)$이므로 접선의 방정식은 $x=0$이다. 따라서 접선의 방정식 $y_1y=2p(x+x_1)$은 이 경우에도 성립한다.

같은 방법으로 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

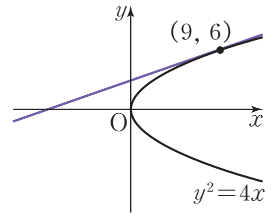
(1) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

(2) 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

예제 03 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9, 6)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.



풀이 포물선의 방정식 $y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=4$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y} \ (\text{단}, y\neq 0)$$

점 $(9, 6)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-6=\frac{1}{3}(x-9) \ \text{즉}, y=\frac{1}{3}x+3$$

답 $y=\dfrac{1}{3}x+3$

다른 풀이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9, 6)$에서의 접선의 방정식이다.

따라서 $y^2=4x=4\times1\times x$이므로 $p=1$

$$6y=2\times1\times(x+9) \ \text{즉}, y=\frac{1}{3}x+3$$

문제 4 다음 주어진 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y^2=-8x$, $(-2, 4)$

(2) $x^2=9y$, $(-3, 1)$

음함수의 미분법을 이용하여 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\dfrac{dy}{dx}=0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y} \ (\text{단}, y\neq 0)$$

이다.

먼저 $y_1 \neq 0$일 때 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2} \quad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ②를 ①에 대입하면

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이다. 한편 $y_1=0$일 때 접점이 $(a, 0)$, $(-a, 0)$이므로 접선의 방정식은 $x=a$, $x=-a$ 이다. 따라서 접선의 방정식 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$은 이 경우에도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

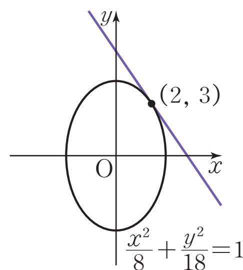
예제 04 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{9}\dfrac{dy}{dx}=0$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{9x}{4y}$ (단, $y\neq 0$)

점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{18}{12}=-\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-2) \text{ 즉, } y=-\frac{3}{2}x+6$$



답 $y=-\dfrac{3}{2}x+6$

문제 5 다음 주어진 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$, $(-2,\ 1)$ (2) $3x^2+4y^2=16$, $(2,\ -1)$

창의 up

음함수의 미분법을 이용하여 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하는 방법을 설명하여라.

음함수의 미분법을 이용하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}\ (\text{단, } y\neq0)$$

이다. 먼저 $y_1\neq0$일 때 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. ②를 ①에 대입하면

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이다. 한편 $y_1=0$일 때 접점이 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$이므로 접선의 방정식은 $x=a$, $x=-a$ 이다. 따라서 접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$은 이 경우에도 성립한다.

같은 방법으로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

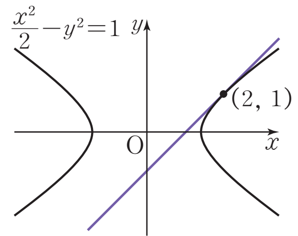
(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

예제 05 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.



풀이 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$의 양변을 x에 대하여

미분하면 $x-2y\frac{dy}{dx}=0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y} \text{ (단, } y\neq0)$$

점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{2}{2}=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=x-2 \text{ 즉, } y=x-1$$

답 $y=x-1$

문제 6 다음 주어진 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$, $(-2, -1)$ (2) $x^2-2y^2=-1$, $(1, 1)$

02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

● 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

매개변수로 나타낸 함수의 도함수는 어떻게 구하는가?

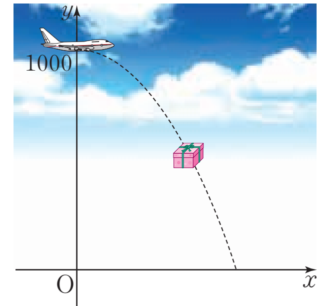
생각 열기 **재해 구호물자**

행정안전부와 소방방재청은 2011년 일본 동북부 대지진 사례를 거울 삼아 해일, 집중 호우, 폭설, 지진 등 대규모 자연재해로 이재민 발생 시 재해 구호물자의 신속한 지원을 위해 '재해 구호물자 통합 정보 시스템' 구축 시범 사업을 완료하였다.



탐구 활동

오른쪽 그림은 재난 지역에 구호물자를 떨어뜨리는 모습을 그래프로 나타낸 것이다. 구호물자는 포물선을 그리며 떨어지고, 떨어뜨리고 나서 시각 t에서의 위치는 $x=50t$, $y=-5t^2+1000$이 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$를 각각 구하여 보자.

2. y를 x에 대한 식으로 나타내어 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여 보자.

3. $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$와 $\dfrac{dy}{dx}$를 비교하여 보자.

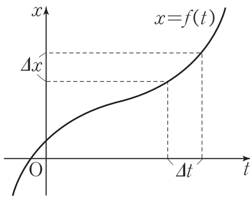
탐구 활동에서와 같이 두 변수 x, y의 함수 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$x=f(t),\ y=g(t) \qquad \cdots\cdots ①$$

와 같이 나타날 때 변수 t를 **매개변수**라 하고, ①을 매개변수로 나타낸 함수라고 한다.

● 매개변수는 영어로 parameter라고 한다.

매개변수 t로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여 보자.



함수 $x=f(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면, 함수 $x=f(t)$의 역함수가 존재하고 그 역함수는 연속이다. 따라서 매개변수 t의 증분 Δt에 대한 x의 증분을 Δx라고 하면, Δx가 한없이 0에 가까워질 때 Δt도 한없이 0에 가까워진다.

이때 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$=\frac{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

매개변수로 나타낸 함수의 미분법

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

예제 01

매개변수 t로 나타낸 함수 $x=3t-1$, $y=-2t^3+5$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 t의 식으로 나타내어라.

풀이 $x=3t-1$에서 $\dfrac{dx}{dt}=3$

$y=-2t^3+5$에서 $\dfrac{dy}{dt}=-6t^2$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-6t^2}{3}=-2t^2$이다.

답 $\dfrac{dy}{dx}=-2t^2$

문제 1 매개변수 t로 나타낸 다음 함수에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 t의 식으로 나타내어라.

(1) $x=2t+3,\ y=t^4+t^2$

(2) $x=t^2+t,\ y=t^3$

(3) $x=\frac{2}{3}t^3+t,\ y=t^3-t^2+2$

(4) $x=t^2+3,\ y=4t^3-\frac{1}{t}$

창의 up

반지름의 길이가 4인 구 모양의 비눗방울이 있다.
이 비눗방울의 반지름이 매초 0.2씩 커진다고 할 때,
비눗방울이 커지기 시작한 지 t초 후의 반지름의 길이와 부피를 각각 $r(t)$, $V(t)$라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) $r(t)$, $V(t)$를 구하여라.

(2) 비눗방울이 커지기 시작한 지 5초 후의 반지름의 길이에 대한 부피의 순간변화율 $\frac{dV}{dr}$를 구하여라.



매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

예제 02 매개변수 t로 나타낸 함수

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{2t}{1+t^2}$$

에 대하여 $t=1$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$

$y=\frac{2t}{1+t^2}$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2(1-t^2)}{-4t}=\frac{1-t^2}{-2t}$이므로 $t=1$일 때 접선의 기울기는 0이다.

$t=1$일 때, $x=0$, $y=1$을 지나므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=0\times(x-0)\ \text{즉},\ y=1$$

답 $y=1$

문제 2 매개변수 t로 나타낸 함수

$$x=t^2-\frac{1}{t},\ y=t-\frac{1}{t^2}$$

에 대하여 $t=-1$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

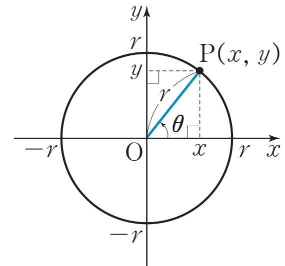
문제 3 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^2-4t+1$, $y=t^3-2t^2-at$에 대하여 $t=1$에서의 접선의 기울기가 4이다. 이때 상수 a의 값을 구하여라.

창의 up

원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$을 매개변수 θ로 나타내면

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

로 표현할 수 있다. 이 방법을 이용하여 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 매개변수 θ로 나타내는 방법을 설명하여라.



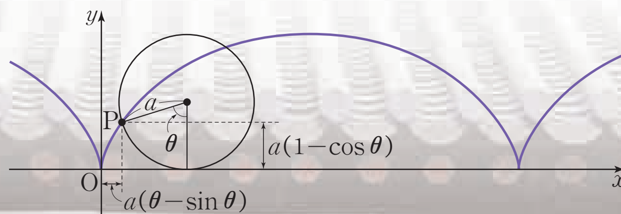
단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

좌표평면의 x축 위를 구르는 원의 반지름의 길이를 a라고 할 때, 사이클로이드 곡선 위의 점 P의 x좌표와 y좌표는 매개변수 θ로 나타낸 함수

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$$

로 나타낼 수 있다. $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 점 P에서의 접선의 방정식을 구하여라.



중단원 기초

1 음함수 $3x^2-5y^2=1$의 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

01 음함수의 미분

2 포물선 $x^2=-4y$ 위의 점 $(4\sqrt{2},\ -8)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

01 음함수의 미분
포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

3 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(2,\ -\sqrt{6})$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

01 음함수의 미분
타원 위의 점에서의 접선의 방정식

4 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

01 음함수의 미분
쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

5 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^4$, $y=t^3+t^2+1$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타내어라.

02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

6 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=t^5+2t^2+6$, $y=t^2+t+3$에 대하여 $t=-1$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

02 매개변수로 나타낸 함수의 미분
곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식

[해답 p.206]

중단원 기본

수준별 학습

1 곡선 $x^2+axy+y^2+b=0$ 위의 점 $(-3, 0)$에서 $\frac{dy}{dx}$의 값이 3일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하여라.

01 음함수의 미분

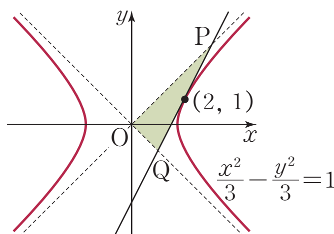
2 포물선 $y^2=4x$ 위의 점과 직선 $y=x+3$ 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

01 음함수의 미분
포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

3 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

01 음함수의 미분
타원 위의 점에서의 접선의 방정식

4 오른쪽 그림과 같은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선과 이 쌍곡선의 점근선과의 두 교점을 P, Q라고 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 구하여라.



01 음함수의 미분
쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

5 타원 $2x^2+y^2=10$과 쌍곡선 $x^2-4y^2=-4$의 한 교점을 P라고 하자. 점 P에서의 타원과 쌍곡선의 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라고 할 때, m_1m_2의 값을 구하여라.

01 음함수의 미분
타원과 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

6 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=2t-1$, $y=t^2+1$에 대하여 $y=f(x)$로 나타내었을 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}$의 값을 구하여라.

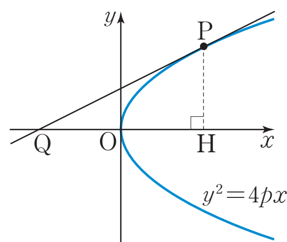
02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

중단원 실력

1 곡선 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=x^2+1$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 방정식이 $y=x+3$이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

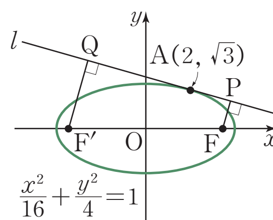
01 음함수의 미분
곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

2 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 P에서의 접선과 x축과의 교점을 Q라고 할 때, $\frac{\overline{QO}}{\overline{OH}}$의 값을 구하여라.



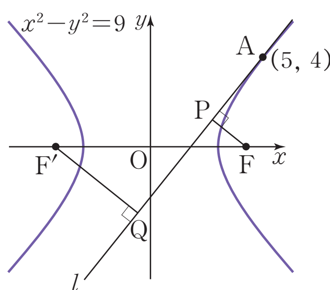
01 음함수의 미분
포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

3 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $A(2, \sqrt{3})$에서의 접선을 l이라 하고, 이 타원의 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자. 이때 $\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}$의 값을 구하여라.



01 음함수의 미분
타원 위의 점에서의 접선의 방정식

4 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=9$ 위의 점 $A(5, 4)$에서의 접선을 l이라 하고, 이 쌍곡선의 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자. 이때 $\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}$의 값을 구하여라.



01 음함수의 미분
쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

5 매개변수 t $(t\geq 1)$로 나타낸 함수 $x=4t-2$, $y=t^3+2t^2-3t$에 대하여 $y=f(x)$로 나타내었을 때, $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값을 구하여라.

02 매개변수로 나타낸 함수의 미분

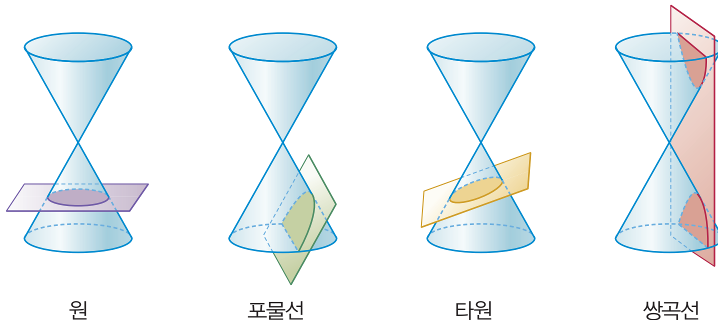
수행 과제

이차곡선(원뿔곡선)

일반적으로 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식은 모두 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

의 특수한 경우이다. 만일 이 방정식의 좌변이 두 일차식의 곱으로 나타내어지면 이 이차방정식은 두 직선의 방정식이 곱해져 있는 것을 나타낸다. 따라서 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식이 나타내는 곡선을 통틀어 이차곡선이라고 한다. 그런데 이차곡선은 다음 그림과 같이 마주보는 두 원뿔을 평면으로 자를 때, 자르는 각도에 따라 그 단면에 나타나는 곡선이기도 하다. 그래서 이차곡선을 원뿔곡선이라고도 한다.



| 과 제 | **1** 포물선은 축에 평행하게 들어온 빛이나 소리를 초점으로 반사하여 모으고 반대로 초점에서 나오는 빛이나 소리를 축에 평행하게 반사하는 성질이 있다. 이 성질을 실생활에 활용한 예를 찾아보자.

| 과 제 | **2** 타원은 한 초점에서 빛을 쏘았을 때 타원에 반사된 빛이 다른 한 초점으로 모이는 성질이 있다. 이 성질을 실생활에 활용한 예를 찾아보자.

대단원 학습 내용 정리

1 이차곡선

포물선의 방정식

(1) 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은

$y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

(2) 초점이 $\mathrm{F}(0, p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

$x^2=4py$ (단, $p\neq0$)

타원의 방정식

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b^2=a^2-c^2)$$

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$로부터의 거리의 합이 $2b$ $(b>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } a^2=b^2-c^2)$$

쌍곡선의 방정식

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b^2=c^2-a^2)$$

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } a^2=c^2-b^2)$$

쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

2 평면 곡선의 접선

음함수의 미분법

x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어져 있을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후에 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

(1) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$

(2) 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x=2p(y+y_1)$

타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

매개변수로 나타낸 함수의 미분법

매개변수 t로 나타낸 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능할 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \text{ (단, } f'(t)\neq0)$$

용어와 기호 포물선(초점, 준선, 축, 꼭짓점), 타원(초점, 꼭짓점, 장축, 단축, 중심), 쌍곡선(초점, 꼭짓점, 주축, 중심, 점근선), 이차곡선, 음함수, 매개변수

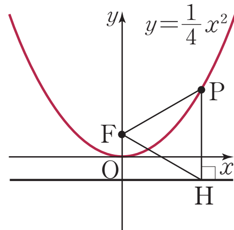
대/단/원 평가 문제

선택형

1 점 A(8, 4)를 지나고 x축에 평행한 직선과 포물선 $y^2=8x$의 교점을 P, 이 포물선의 초점을 F라고 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

2 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$의 초점을 F, 이 포물선 위의 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 삼각형 PFH가 정삼각형일 때, 삼각형 PFH의 둘레의 길이는?

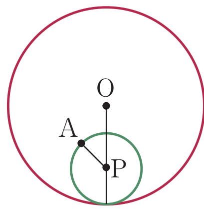


① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 18

3 두 타원 $2x^2+3y^2-4x-6y-1=0$과 $3x^2+4y^2-6x-8y-a=0$의 초점이 일치할 때, 상수 a의 값은? (단, $a\neq-7$)

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

4 오른쪽 그림과 같이 중심이 O인 원의 내부에서 중심 O가 아닌 정점 A를 지나면서 원에 내접하는 원의 중심을 P라고 할 때, 점 P의 자취는?



① 선분　② 원　③ 포물선　④ 타원　⑤ 쌍곡선

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$의 한 초점의 좌표가 $(10,\ 0)$이고 한 점근선의 기울기가 $\frac{3}{4}$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 14　② 15　③ 16　④ 17　⑤ 18

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라고 하자. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 PFF′의 둘레의 길이가 14일 때, $|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2|$의 값은?

① 30　② 32　③ 34　④ 36　⑤ 38

7 음함수 $2x^2+3y^2=6$에서 $\frac{dy}{dx}$는?

① $-\frac{3x}{2y}$　② $\frac{3x}{2y}$　③ $-\frac{2x}{3y}$　④ $\frac{2x}{3y}$　⑤ $-\frac{3x}{4y}$

8 포물선 $y^2=24x$ 위의 점 $\left(\frac{a^2}{24},\ a\right)$에서 접선의 기울기가 자연수가 되도록 하는 0이 아닌 정수 a의 개수는?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

9 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선과 x축과의 교점의 좌표가 $(4, 0)$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $b>0$)

① $\frac{52}{9}$ ② 7 ③ $\frac{26}{3}$
④ $\frac{28}{3}$ ⑤ 10

10 매개변수로 나타낸 함수

$$x=2\sqrt{t}+1,\ y=\frac{2t}{t-1}-\frac{1}{t}$$

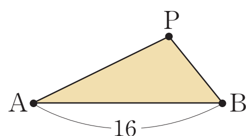
에 대하여 $t=2$에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ② $-\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{5\sqrt{2}}{4}$
④ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

서답형

11 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점과 이 포물선의 초점을 연결하는 선분의 중점의 자취를 나타내는 방정식을 구하여라.

12 다음 그림과 같이 두 정점 A, B와 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=20$을 만족시키며 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=16$일 때, 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하여라.

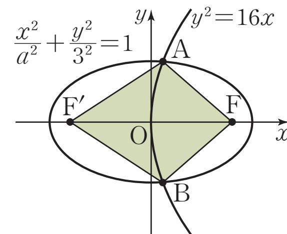


13 음함수 $x^3+y^3+x+y-3=0$의 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

14 매개변수로 나타낸 함수 $x=\cos^3\theta$, $y=2\sin^3\theta$에 대하여 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\ (a>3)$의 두 초점 중 한 초점이 포물선 $y^2=16x$의 초점과 일치한다고 한다. 이 두 곡선의 교점을 A, B라 하고, 타원의 두 초점을 F, F′이라고 할 때, 사각형 AF′BF의 둘레의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



|서|술|형|

16 함수 $\frac{\pi}{2}x=y+\sin(xy)$로 주어지는 그래프 위의 점 $(2, \pi)$에서 접선의 기울기를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

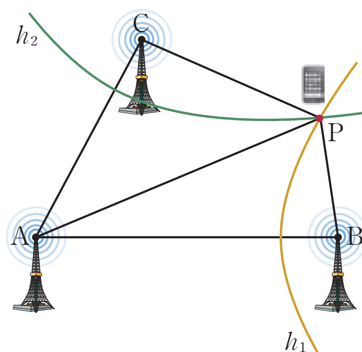
M+ Science

수 학 ✚ 과 학



생활 속의 쌍곡선

이차곡선 중 쌍곡선은 우리의 일상생활 속에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 제2차 세계 대전 중에 군함의 위치를 파악하기 위해 쌍곡선을 이용한 항법 장치를 사용하였는데, 이 원리가 현재에 이르러 휴대전화를 이용한 위치 추적에 활용되고 있다.



예를 들어 서비스 기지국 A와 인접 기지국 B에서 동시에 보낸 신호가 휴대전화 P에 도착하는 시간의 차이가 d_1임을 이용하여 휴대전화가 쌍곡선 h_1 위에 있음을 알았다고 하자. 서비스 기지국 A와 다른 인접 기지국 C에서 동시에 보낸 신호가 휴대전화 P에 도착하는 시간의 차이가 d_2임을 이용하여 휴대전화가 쌍곡선 h_2 위에 있음만 알면 두 쌍곡선 h_1과 h_2의 교점으로 휴대전화 P의 위치를 알아낼 수 있다.





2008년에 개봉한 영화 〈지구가 멈추는 날 (THE DAY THE EARTH STOOD STILL)〉에서도 쌍곡선을 찾아볼 수 있다.

이 영화는 지구의 종말을 다루었는데, 미확인 비행 물체가 지구를 향해 곧장 돌진하는 것으로 시작한다. 목성 궤도에서 처음 발견된 '물체 07/493' 이 초속 3만 km의 속도로 궤도를 따라 태양계를 통과하고 있으며, 지구와 멀리 떨어져 지나갈 것이라 예상했지만 중력과 상관없이 움직여 지구 맨해튼에 78분 후 떨어진다는 것이다. 그런데 지구와 충돌할 것이라 여겨졌던 '물체 07/493' 은 속력을 줄여 지구에 착륙한다. 그리고 지구에 착륙한 '물체 07/493' 에서는 인간과 똑같이 생긴 외계인 클라투가 내린다.

이 영화에서 클라투가 타고 온 우주선인 '물체 07/493' 이 쌍곡선 궤도를 따라 태양계를 통과하였다는 말이 나온다. 쌍곡선은 실제로 천문학에서 자주 찾아볼 수 있는데, 영화에서 등장하는 우주선처럼 쌍곡선 궤도로 움직이는 천체가 있다. 그중 대표적인 천체인 혜성은 보통 포물선, 타원, 쌍곡선과 같은 이차곡선 모양의 궤도를 그린다. 이 중 태양계 주변으로 다시 돌아오지 않는 혜성이 쌍곡선 궤도를 그리는 것으로 알려져 있다.

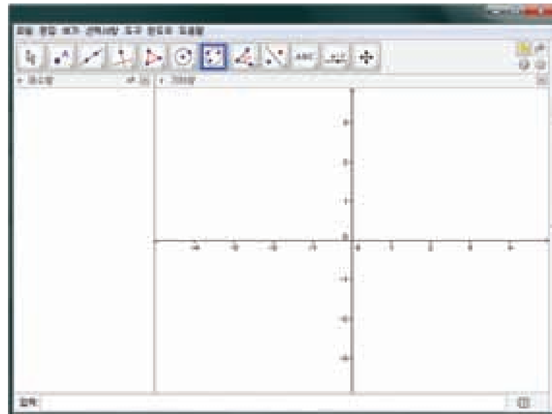
〈출처: 네이버 영화(http://movie.naver.com/movie)〉

M+ Engineering



수 학 ✚ 공 학

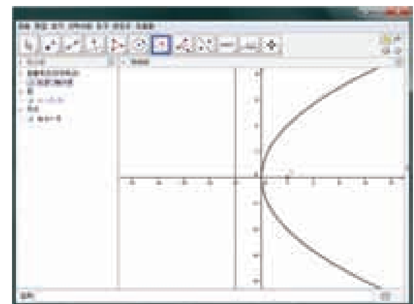
기하 작도용 소프트웨어를 이용하면 이차곡선을 쉽게 그릴 수 있다.



메뉴 아래의 도구상자를 이용하여 포물선, 타원, 쌍곡선을 그려 보자.



1\ 포물선 $y^2=4x$를 그려 보자.



❶ 도구상자에서 새로운 점 아이콘 을 선택하여 $(1, 0)$에 초점 A를 찍는다.

❷ 실행화면 아래의 수식입력창에 준선의 방정식 $x=-1$을 입력한다.

❸ 도구상자에서 포물선 아이콘 을 선택한다.

❹ 점 A와 직선 $x=-1$을 선택하면 포물선 $y^2=4x$를 그릴 수 있다.

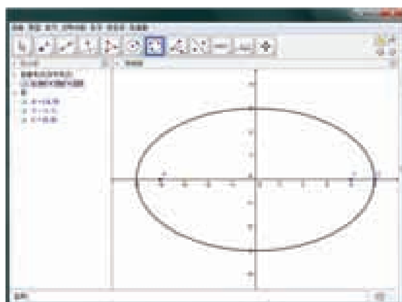
더불어 도구상자에서 이동 아이콘 을 선택하여 점과 직선을 마우스로 잡아끌면서 자유롭게 움직이면 다양한 포물선을 그릴 수 있다.

[다른 방법]

실행화면 아래의 수식입력창에 '포물선[(초점의 좌표), 준선의 방정식]'을 입력해도 된다. 예를 들어 포물선 $x^2=4y$를 그리려면 수식입력창에 '포물선$[(0, 1), y=-1]$'을 입력한다.

2 \ 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$을 그려 보자.

❶ 도구상자에서 새로운 점 아이콘 을 선택하여 $(-4, 0)$, $(4, 0)$에 두 초점 A, B를 찍고, $(5, 0)$에 한 꼭짓점 C를 찍는다.
❷ 도구상자에서 타원 아이콘 을 선택한다.
❸ 두 점 A, B를 선택하고 점 C를 선택하면 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$을 그릴 수 있다.

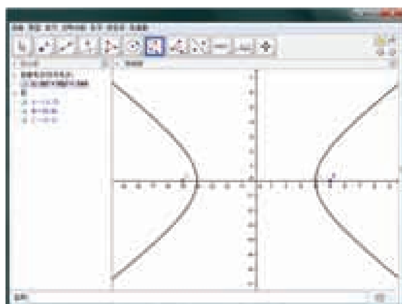


더불어 도구상자에서 이동 아이콘 을 선택하여 세 점을 마우스로 잡아끌면서 자유롭게 움직이면 다양한 타원을 그릴 수 있다.

[다른 방법]
실행화면 아래의 수식입력창에 '타원$\left[\right.$(초점의 좌표), (초점의 좌표), 장축의 $\left.\frac{1}{2}\right]$' 을 입력해도 된다. 예를 들어 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$을 그리려면 수식입력창에 '타원$[(0, 4), (0, -4), 5]$' 를 입력한다.

3 \ 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$을 그려 보자.

❶ 도구상자에서 새로운 점 아이콘 을 선택하여 $(-5, 0)$, $(5, 0)$에 두 초점 A, B를 찍고, $(4, 0)$에 한 꼭짓점 C를 찍는다.
❷ 도구상자에서 쌍곡선 아이콘 을 선택한다.
❸ 두 점 A, B를 선택하고 점 C를 선택하면 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$을 그릴 수 있다.



더불어 도구상자에서 이동 아이콘 을 선택하여 세 점을 마우스로 잡아끌면서 자유롭게 움직이면 다양한 쌍곡선을 그릴 수 있다.

[다른 방법]
실행화면 아래의 수식입력창에 '쌍곡선$\left[\right.$(초점의 좌표), (초점의 좌표), 주축의 $\left.\frac{1}{2}\right]$' 을 입력해도 된다. 예를 들어 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$을 그리려면 수식입력창에 '쌍곡선$[(0, 5), (0, -5), 3]$' 을 입력한다.




A9

돛으로 항해하는 배가 올바른 방향으로 나아가기 위해서는
바람의 방향과 세기를 잘 살펴야 한다.

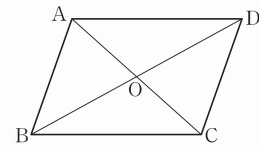
평면벡터

Ⅱ

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중② 평행사변형의 성질

1 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에 대하여 다음 □ 안에 알맞은 선분을 써넣어라.



(1) $\overline{AB}$ // □, $\overline{AD}$ // □

(2) $\overline{AO}$ = □, $\overline{BO}$ = □

수학Ⅰ 두 점 사이의 거리

2 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1) $(1, 2)$, $(3, -1)$

(2) $(4, -5)$, $(7, 1)$

수학Ⅰ 직선의 방정식

3 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $A(1, 2)$를 지나고 기울기가 3인 직선

(2) 두 점 $P(2, 1)$, $Q(4, 5)$를 지나는 직선

1 벡터의 연산

항해술

9세기 신라는 활발한 해상 무역을 펼치며 동북아시아 바다의 주인으로 군림하였는데, 장보고가 이에 큰 역할을 하였다. 당나라에서 군인 생활을 한 그는 신라로 돌아와 청해에 진을 설치하여 무역을 방해하는 해적을 소탕하고 신라를 해상 무역의 중심으로 이끌었다.

장보고의 이러한 노력뿐만 아니라 신라의 항해술도 해상 무역의 발전에 기여하였다. 항해술이란 항해 중인 선박이 현재 위치한 곳을 알고 가까운 길과 흐르는 해류 등을 추정하여 항해하는 기술인데, 당시 신라의 항해술은 일본 사신이나 승려가 중국에 갈 때 신라의 도움을 받을 정도로 뛰어났다. 이는 동북아시아에서뿐만 아니라 세계적으로도 우수한 수준이었다고 하는데, 이와 같은 항해술을 기반으로 신라는 여러 나라를 자유로이 오갈 수 있었다.



신라의 우수한 항해술은 바다에서 배의 위치나 밀물과 썰물의 정확한 시각 예측에서 비롯된다. 밀물과 썰물 등의 자연 현상은 달을 비롯한 행성들의 운동과 밀접한 관련이 있기 때문에 행성의 운동을 예측하는 것이 필요한데, 이때 행성의 운동 방향과 속력을 가지는 양의 연산이 필요하다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 76쪽

해류가 있을 때와 해류가 없을 때 배의 진행 방향에는 어떤 차이가 있을까?

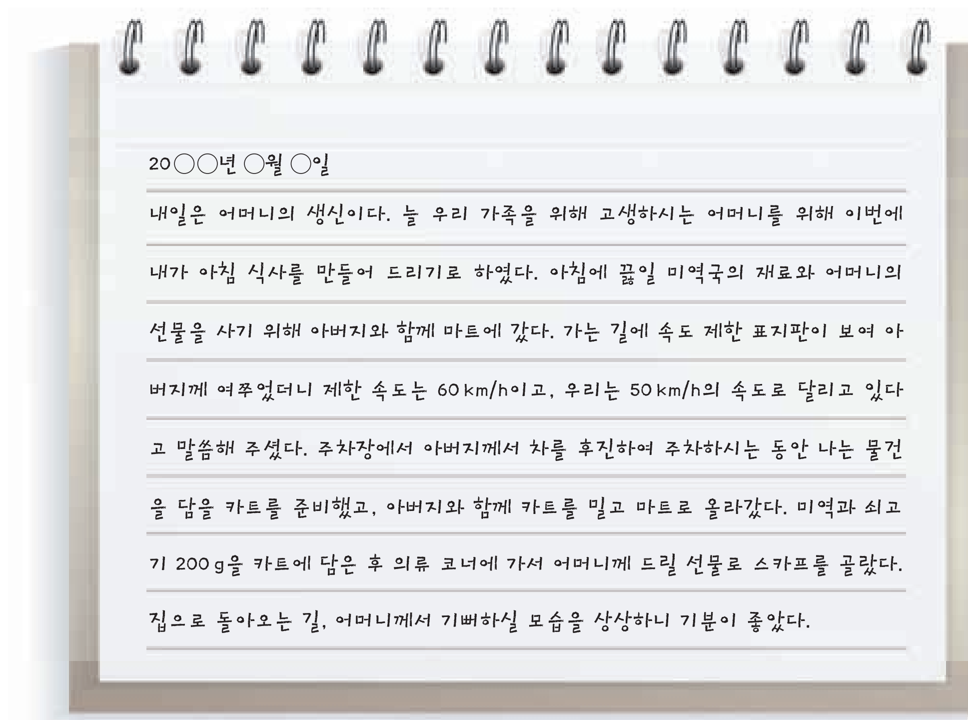
01

벡터의 뜻

● 벡터의 뜻을 안다.

벡터란 무엇인가?

탐구 활동 다음은 현민이가 쓴 일기이다. 글을 읽고 물음에 답하여 보자.



1. 일기에서 크기를 가지는 양을 찾아보자.

2. **1**에서 크기뿐만이 아니라 방향을 가지는 양을 말하여 보자.

물건의 무게, 건물의 높이, 자동차의 속력 등은 크기만 가지고 있으므로 그 양을 실수로 나타낼 수 있다. 그러나 물체를 미는 힘, 물체가 움직이는 속도와 가속도 등은 크기뿐만 아니라 그것이 작용하는 방향도 함께 밝혀 주어야 그 양을 나타낼 수 있다.

이를테면 바람은 '초속 30 m의 남동풍'과 같이 크기와 방향을 함께 밝혀 주어야만 그 양을 정확히 나타낼 수 있다. 이처럼 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **벡터**라고 한다.

● 크기만 가지는 양을 스칼라(scalar)라고 한다.

● 벡터는 영어로 vector이다.

벡터는 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 점 B로 향하는 화살표를 사용하여 그 크기와 방향을 나타내고, 이것을 기호로

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

와 같이 나타낸다.

이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 **시점**, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 **종점**이라고 한다.

또 선분 AB의 길이를 **벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 크기**라 하고, 이것을 기호로

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$

와 같이 나타낸다.

벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 기호로

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \cdots$$

와 같이 나타내고, 벡터 $\vec{a}$의 크기는 기호로

$$|\vec{a}|$$

와 같이 나타낸다. 특히 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라고 한다.

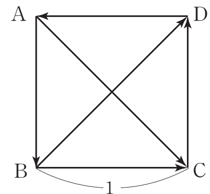
또한 평면에 주어진 벡터를 **평면벡터**라고 한다.

보기 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|=1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{2}$$

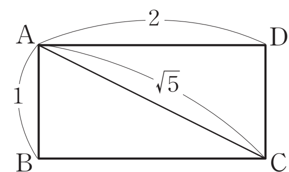
이고, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$는 단위벡터이다.



문제 1 오른쪽 그림과 같은 직사각형에 대하여 다음 벡터를 모두 구하여라.

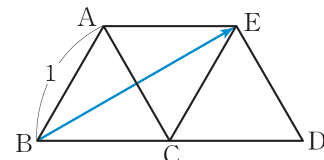
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 크기가 같은 벡터

(2) 단위벡터



발전

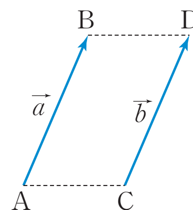
문제 2 오른쪽 그림은 한 변의 길이가 1인 정삼각형 3개를 이어 붙여 만든 도형이다. 이 도형에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$의 크기를 구하여라.



두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$의 크기와 방향이 같을 때 두 벡터는 서로 같다고 하며, 기호로

$$\vec{a}=\vec{b} \text{ 또는 } \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

와 같이 나타낸다.



즉, 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하여 벡터 $\overrightarrow{CD}$와 겹쳐지면 두 벡터는 시점은 다르지만 그 크기와 방향이 각각 같으므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이다.

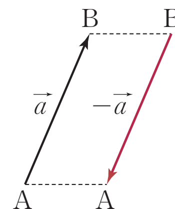
한편 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 기호로

$$-\vec{a}$$

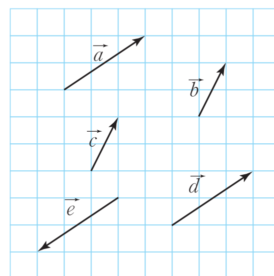
와 같이 나타낸다.

즉, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$이다.

$|-\vec{a}|=|\vec{a}|$
$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|$



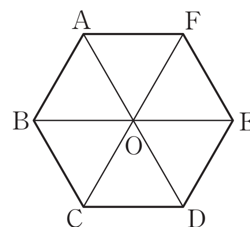
보기 오른쪽 그림에서 $\vec{a}$와 $\vec{d}$, $\vec{b}$와 $\vec{c}$는 크기와 방향이 서로 같은 벡터이므로 $\vec{a}=\vec{d}$, $\vec{b}=\vec{c}$이다. 또 $\vec{a}$와 $\vec{e}$, $\vec{d}$와 $\vec{e}$는 크기는 같고 방향이 반대인 벡터이므로 $\vec{a}=-\vec{e}$, $\vec{d}=-\vec{e}$이다.



문제 3 오른쪽 그림과 같은 정육각형 ABCDEF에서 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$의 교점을 O라고 할 때, 다음 벡터를 모두 구하여라.

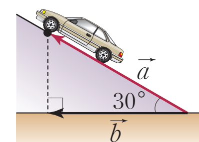
(1) $\overrightarrow{CD}$와 같은 벡터

(2) $\overrightarrow{OA}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터



실생활

문제 4 오른쪽 그림과 같이 자동차가 지면과 30°의 각을 이루고 있는 경사면을 오를 때의 속도 50 km/h를 벡터 $\vec{a}$라고 할 때, 지면에 수평인 방향에서의 속도를 나타내는 $\vec{b}$의 크기를 구하여라.





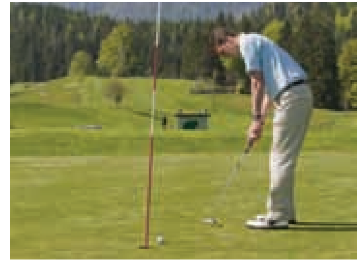
02 벡터의 연산

● 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

벡터의 덧셈은 어떻게 하는가?

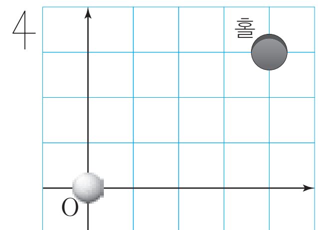
생각 열기 **골프**

골프는 정지된 공을 골프채로 쳐서 그린에 있는 홀에 넣을 때까지 소요된 타수가 적은 사람이 이기는 경기이다. 골프를 생각하면 스윙을 하는 모습을 떠올리기 쉽지만, 낮은 타수를 위해서는 그린에서의 퍼팅이 중요한데 퍼팅이란 그린에 올라온 공을 굴려 치는 방법을 말한다.



탐구 활동

세라는 그린에서 공을 한 번 쳐서 동쪽으로 4 m 굴리고, 그 공을 다시 한 번 쳐서 북쪽으로 3 m 굴려 홀에 넣었다. 오른쪽 그림에서 한 눈금의 크기는 1 m를 나타낸다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 세라가 친 공의 움직임을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.
2. 공을 한 번 쳐서 홀에 넣었을 때, 공의 움직임을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.

두 벡터의 덧셈에 대하여 알아보자.

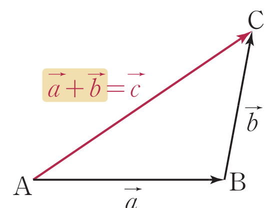
● 삼각형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때에는 $\vec{a}$의 종점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

● $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$가 되도록 세 점 A, B, C를 잡을 때, $\overrightarrow{AC}$로 나타내어지는 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고, 기호로

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \text{ 또는 } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

와 같이 나타낸다.

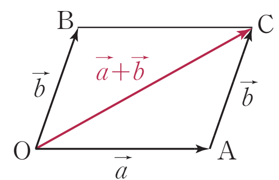


● 평행사변형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때에는 $\vec{a}$의 시점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

한편 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$이므로

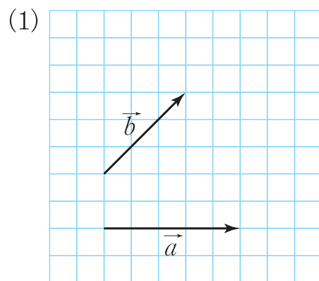
$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

이다.

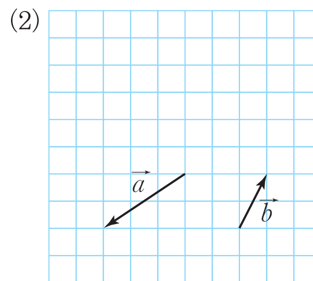


문제 1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음과 같을 때, $\vec{a}+\vec{b}$를 그림으로 나타내어라.

(1)



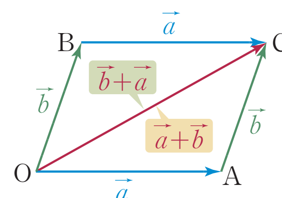
(2)



벡터의 덧셈에 대한 연산법칙을 알아보자.

오른쪽 그림과 같은 평행사변형 OACB에서

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때,



$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$$

이므로

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

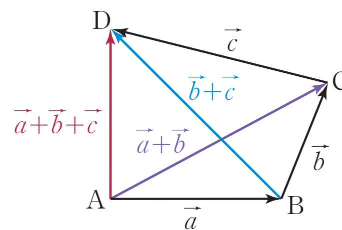
이다. 따라서

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

또 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{CD}$$



가 되도록 네 점 A, B, C, D를 잡으면

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AD}$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$
$$=\overrightarrow{AD}$$

이다. 따라서

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

결합법칙에 의하여 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$와 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$는 간단히 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$와 같이 쓴다.

벡터의 덧셈에 대한 연산법칙

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

문제 2 서로 다른 임의의 네 점 A, B, C, D에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$를 간단히 하여라.

벡터 $\overrightarrow{AA}$와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라 하고, 기호로

$$\vec{0}$$

와 같이 나타낸다.

이때 영벡터의 크기는 0이고, 그 방향은 생각하지 않는다.

임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$라고 하면

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$$

이다. 또 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이므로

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

이다.

일반적으로 임의의 벡터 $\vec{a}$와 영벡터 $\vec{0}$에 대하여 다음이 성립한다.

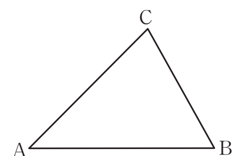
영벡터와 벡터의 덧셈

(1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(2) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

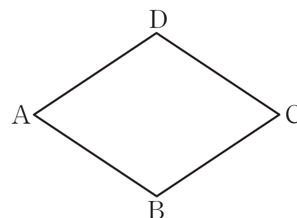
보기 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에 대하여

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$



문제 3 오른쪽 그림과 같은 마름모 ABCD에서 다음이 성립함을 증명하여라.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$



이제 벡터의 뺄셈에 대하여 알아보자.

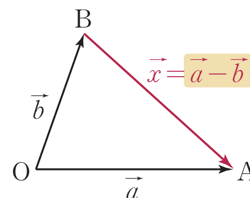
오른쪽 그림과 같은 삼각형 OAB에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때,

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$$

를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고, 기호로

$$\vec{a}-\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.

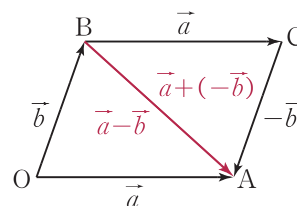


이때 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$이다.

● $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$
$=\overrightarrow{BA}$

한편 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 OACB에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때,

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$$



이다. 그런데

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$$
$$-\vec{b}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CA}$$

이므로

$$\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$$

이다. 따라서

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

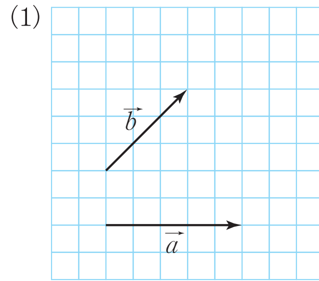
벡터의 뺄셈

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$일 때

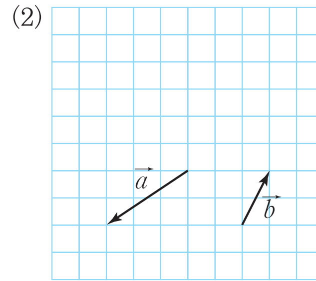
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

문제 4 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음과 같을 때, $\vec{a}-\vec{b}$를 그림으로 나타내어라.

(1)

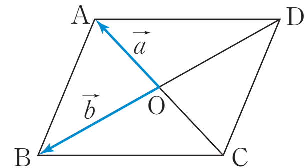


(2)



예제 01

오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



(1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{BC}$

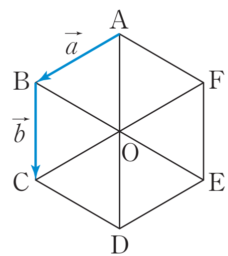
풀이 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\vec{a}-\vec{b}$

답 (1) $\vec{b}-\vec{a}$ (2) $-\vec{a}-\vec{b}$

문제 5 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선의 교점을 O, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{OF}$ (2) $\overrightarrow{CD}$ (3) $\overrightarrow{DF}$



사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

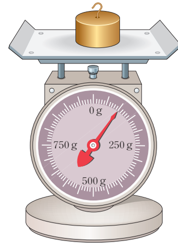
평면 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$가 성립할 때, 점 P는 어떤 위치에 있는지 설명하여 보자.

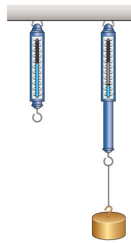
벡터의 실수배는 어떻게 하는가?

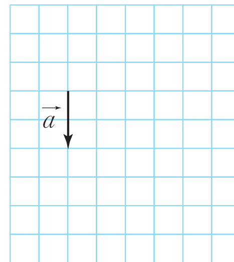
탐구 활동

지구가 물체를 수직 방향으로 끌어당기는 힘을 중력이라고 하며, 이 중력이 물체를 끌어당기는 힘의 크기를 무게라고 한다. 다음 그림과 같은 접시저울에 무게가 100 g인 추를 올려놓았을 때, 추에 작용하는 중력을 벡터 $\vec{a}$라고 하자. 물음에 답하여 보자.







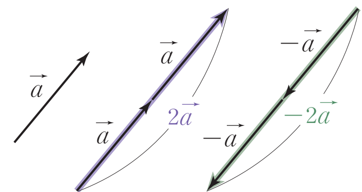


1. 접시저울에 무게가 200 g인 추를 올려놓았을 때, 추에 작용하는 중력을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.

2. 접시저울에 무게가 50 g인 추를 올려놓았을 때, 추에 작용하는 중력을 나타내는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.

3. **1**, **2**를 벡터 $\vec{a}$와 비교하여 보자.

영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{a}$는 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다.



이것을

$$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$$

로 나타낸다.

또 $(-\vec{a})+(-\vec{a})$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다.

이것을

$$(-\vec{a})+(-\vec{a})=-2\vec{a}$$

로 나타낸다.

일반적으로 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 **실수배**라 하고, 다음과 같이 정의한다.

$1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

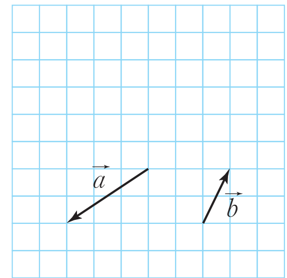
벡터의 실수배

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, 실수 k에 대하여 $k\vec{a}$는
  ① $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.
  ② $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.
  ③ $k=0$이면 $\vec{0}$이다.
(2) $\vec{a}=\vec{0}$일 때, 임의의 실수 k에 대하여 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

보기 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $|\vec{a}|$의 1.5배인 벡터는 $1.5\vec{a}$이다.
$\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|\vec{a}|$의 3배인 벡터는 $-3\vec{a}$이다.

문제 6 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 벡터를 그림으로 나타내어라.

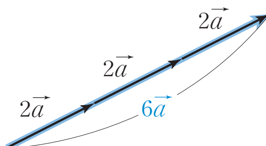
(1) $2\vec{a}$ (2) $-4\vec{b}$ (3) $2\vec{a}+\vec{b}$

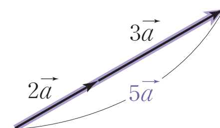


창의 up

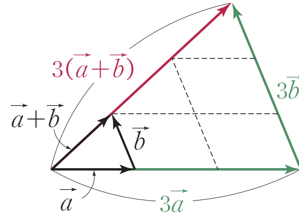
$\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, 벡터 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터임을 설명하여라.

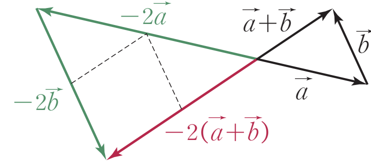
벡터의 실수배에 대한 성질을 알아보자.
다음 그림에서 $3(2\vec{a})=6\vec{a}$, $2\vec{a}+3\vec{a}=5\vec{a}$가 성립함을 알 수 있다.





또 다음 그림에서 $3\vec{a}+3\vec{b}=3(\vec{a}+\vec{b})$, $-2\vec{a}-2\vec{b}=-2(\vec{a}+\vec{b})$가 성립함을 알 수 있다.





일반적으로 다음이 성립한다.

벡터의 실수배에 대한 성질

실수 k, l과 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

(1) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ (결합법칙)

(2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (분배법칙)

(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (분배법칙)

예제 02

$3(\vec{a}+2\vec{b})-(4\vec{a}-\vec{b})$를 간단히 하여라.

풀이 $3(\vec{a}+2\vec{b})-(4\vec{a}-\vec{b})=3\vec{a}+3(2\vec{b})-4\vec{a}+\vec{b}$

$=3\vec{a}+6\vec{b}-4\vec{a}+\vec{b}$

$=(3-4)\vec{a}+(6+1)\vec{b}$

$=-\vec{a}+7\vec{b}$

답 $-\vec{a}+7\vec{b}$

문제 7 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $3(\vec{a}+3\vec{b})+2(-\vec{a}+4\vec{b})$

(2) $2(\vec{a}-5\vec{b}+2\vec{c})-3(-\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c})$

문제 8 다음 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\vec{a}+2\vec{x}=5\vec{a}-4\vec{b}$

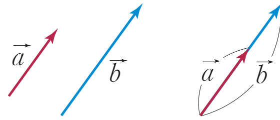
(2) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{x}=2(\vec{x}-4\vec{a})$

벡터의 평행에 대하여 알아보자.

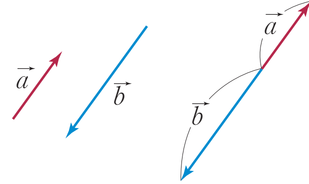
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며, 기호로

$$\vec{a} /\!/ \vec{b}$$

와 같이 나타낸다.



$\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같은 경우



$\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 반대인 경우

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

> **벡터의 평행**
>
> 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
>
> $\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

예제 03 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{MN}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$임을 증명하여라.

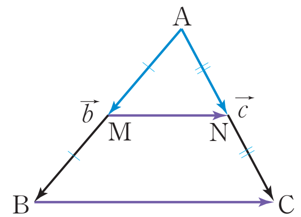
증명 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\vec{c}-\vec{b}\end{aligned}$$

한편 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\vec{c}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}&=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\&=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\\&=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{MN}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$이다.



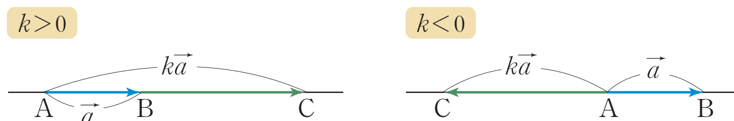
문제 9 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하지 않을 때, 두 벡터 $\vec{a}+3\vec{b}$와 $k\vec{a}-6\vec{b}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

창의 up

사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$를 만족시키는 사각형 ABCD는 어떤 사각형인지 설명하여라.

서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

역으로 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.



예제 04 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=4\vec{a}-\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있음을 증명하여라.

증명 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\vec{a}+2\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$

$=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}-\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$

$=2\vec{a}-2\vec{b}$

$=-2(-\vec{a}+\vec{b})$

따라서 $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

문제 10 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=m\vec{a}+3\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=-\vec{a}-3\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m의 값을 구하여라.

(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

사각형 ABCD와 임의의 점 O에 대하여

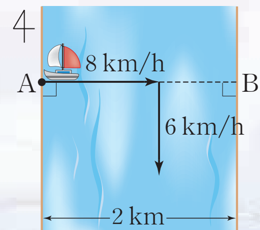
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$$

가 성립할 때, 이 사각형은 어떤 사각형인지 설명하여 보자.

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

오른쪽 그림과 같이 한 섬의 A 지점에서 배를 타고 정동쪽으로 2 km 떨어진 다른 섬으로 건너가려고 한다. 해류의 속도는 시속 6 km이고, 흐르지 않는 물에서의 속도가 시속 8 km로 일정한 배가 선착장인 A 지점에서 정동쪽으로 출발한다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) 배의 실제 속도를 구하여라.

(2) 배가 바다를 건너는 데 걸리는 시간을 구하여라.

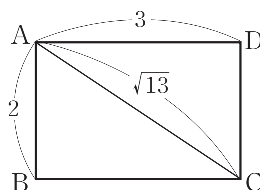
(3) 배가 도착하게 되는 지점은 B 지점에서 얼마나 떨어진 곳인지 구하여라.

중단원 기초

1 오른쪽 그림의 직사각형에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AB}$와 크기가 같은 벡터

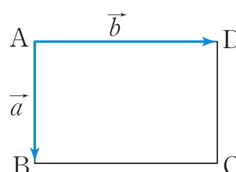
(2) $\overrightarrow{AC}$와 크기가 같은 벡터



01 벡터의 뜻
벡터의 크기

2 오른쪽 그림의 직사각형에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{DC}$ (2) $-\overrightarrow{BC}$

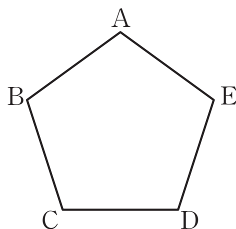


01 벡터의 뜻
서로 같은 벡터

3 오른쪽 그림과 같은 정오각형에서 다음 벡터를 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

(2) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ED}+(-\overrightarrow{AC})$



02 벡터의 연산

4 다음 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\vec{a}-\vec{x}=\vec{b}-2\vec{a}$

(2) $2(\vec{x}-3\vec{a})=9\vec{b}-\vec{x}$

02 벡터의 연산
벡터의 실수배

5 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하지 않을 때, 두 벡터 $2\vec{a}-k\vec{b}$, $-4\vec{a}+6\vec{b}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

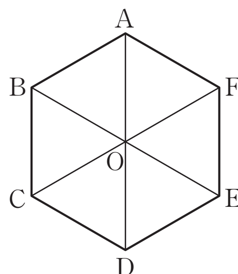
02 벡터의 연산
벡터의 평행

[해답 p.209]

중단원 기본

수준별 학습

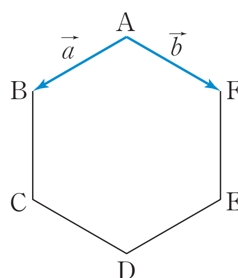
1 오른쪽 그림과 같은 정육각형에서 7개의 점 A, B, C, D, E, F, O를 시점과 종점으로 하는 벡터 중 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터의 개수를 구하여라. (단, 점 O는 세 대각선의 교점이다.)



01 벡터의 뜻
서로 같은 벡터

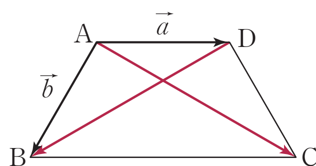
2 오른쪽 그림과 같은 정육각형에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$일 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{CE}$　　　(2) $\overrightarrow{AC}$



02 벡터의 연산

3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$, $\overline{BC}=2\overline{AD}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



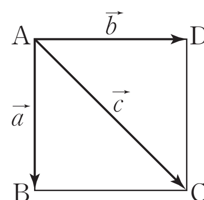
02 벡터의 연산

4 영벡터가 아닌 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 평행이 아니고, 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$는 평행이다. 이때 $m(\vec{a}+6\vec{b})+2\vec{a}-4\vec{c}=\vec{0}$를 만족시키는 실수 m의 값을 구하여라.

02 벡터의 연산
벡터의 평행

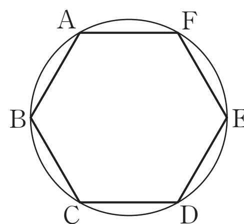
1 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$일 때, 다음 벡터의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　　(2) $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$



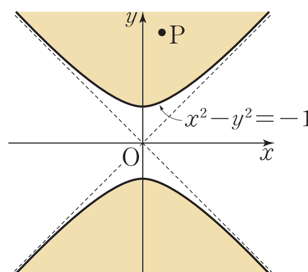
01 벡터의 뜻
02 벡터의 연산
벡터의 크기와 연산

2 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 정육각형에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|=12$일 때, 정육각형의 한 변의 길이를 구하여라.



02 벡터의 연산

3 오른쪽 그림과 같이 색칠한 영역 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\vec{x}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$라고 하자. 이때 $\vec{x}$의 종점의 집합이 나타내는 도형의 길이를 구하여라.



02 벡터의 연산
벡터의 실수배

4 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=k\vec{a}+3\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

02 벡터의 연산
세 점이 한 직선 위에 있을 조건

2

평면벡터의 성분과 내적

그림자 극

그림자 극이란 스크린에 조명을 비추고 조명 앞에서 인형을 움직여 스크린에 나타난 인형의 그림자로 연기하는 인형극을 말한다. 이외에도 손을 이용하여 형상이 만들어지도록 하는 그림자 놀이, 빛을 비춘 스크린 위에 모래를 깔아 놓고 모래에 그림을 그려 장면을 만드는 모래 애니메이션도 그림자 극에 속한다.

그림자 극에 사용하는 인형은 빛이 투과되지 않도록 두꺼운 재질의 천이나 종이 등을 사용하는데, 인형의 실루엣만 나타나므로 일반적으로 색을 다양하게 사용하지 않고 하나의 색만 이용하여 인형을 만든다. 하지만 인형을 화려하게 만들기 위하여 인형의 일부분을 잘라낸 후, 그 잘라낸 부분에 셀로판과 같은 반투명 색지를 붙이기도 하고, 코팅한 후 유성 매직을 칠해서 색을 표현하기도 한다. 인형을 움직이기 위해서 보통 인형의 아랫부분에 투명한 아크릴 판을 잘라낸 막대를 붙여 사용하는데 종이 인형에 투명한 필름을 붙여 스크린 위에서 인형을 넣어 움직이는 형태로 사용하기도 한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 96쪽

인형의 그림자를 이용하여 스크린이 얼마나 기울어졌는지 알 수 있을까?

01

평면벡터의 성분

● 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.

위치벡터란 무엇인가?

생각 열기

테마파크

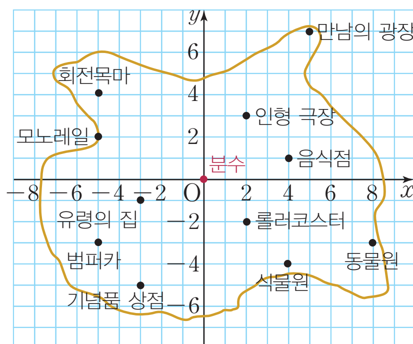


테마파크는 특정한 주제를 바탕으로 그 주제와 연속성을 가지는 환경, 놀이 시설, 이벤트 등을 기획하고 구성함으로써 방문객에게 감동과 즐거움을 제공하는 여가 활동 공간을 뜻한다. 테마파크의 기원은 1955년 미국 캘리포니아에 세워진 디즈니랜드라고 할 수 있다.

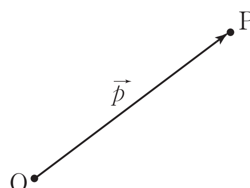
테마파크 사업은 지역 개발 효과, 기업과 지역의 이미지 향상 효과, 지역 주민의 고용 창출과 지역 경제 파급 효과 등을 기대할 수 있기 때문에 지역 경제 활성화를 위한 주요 수단으로서 각광을 받고 있다.

탐구 활동

오른쪽 그림은 어느 테마파크의 분수를 좌표평면 위의 원점에 대응되도록 나타낸 안내도이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 분수가 있는 지점을 시점으로 하고 롤러코스터가 있는 지점을 종점으로 하는 벡터를 그림으로 나타내어 보자.
2. 범퍼카가 있는 지점을 시점으로 하고 기념품 상점이 있는 지점을 종점으로 하는 벡터는 1에서 구한 벡터와 같은 벡터인가?
3. 테마파크 안의 시설물을 시점과 종점으로 하는 벡터 중에서 1에서 구한 벡터와 같은 벡터를 모두 찾아서 그림으로 나타내어 보자.



평면에서 한 점 O를 시점으로 정하면 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$인 벡터 $\vec{p}$는 오직 하나로 정해진다.

역으로 임의의 벡터 $\vec{p}$에 대하여 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$인 점 P의 위치도 오직 하나로 정해진다.

즉, 시점을 한 점 O로 정하면 평면 위의 한 점 P와 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 일대일 대응한다. 이때 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 **위치벡터**라고 한다.

일반적으로 위치벡터의 시점 O는 좌표평면의 원점으로 잡는다.

원점 O의 위치벡터는 영벡터 $\vec{0}$이다. 원점 O에 대한 점 A의 위치벡터를 간단히 점 A의 위치벡터라고 한다.

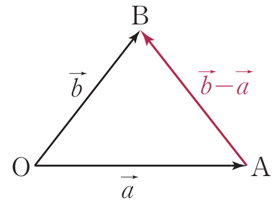
오른쪽 그림과 같이 점 O에 대한 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하면

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$$

이므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 두 점 A, B의 위치벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

이다.



보기 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\&=(\vec{b}-\vec{a})+3(\vec{c}-\vec{b})\\&=-\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\end{aligned}$$

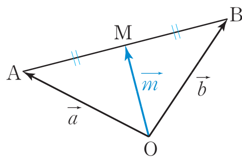
문제 1 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.

예제 01 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는 다음과 같음을 증명하여라.

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

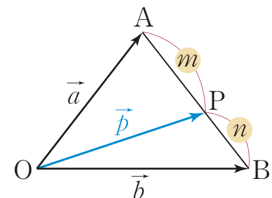


증명 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이고, $\overrightarrow{AP}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$이므로

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})\\&=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}\end{aligned}$$



문제 2 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$는 다음과 같음을 증명하여라.

$$\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

문제 3 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 다음 점의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P

(2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q

예제 02 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는 다음과 같음을 증명하여라.

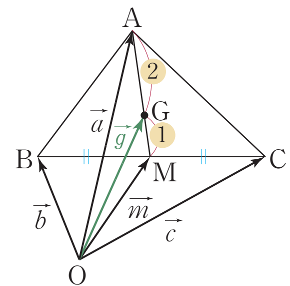
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

증명 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라고 하면 점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

또 무게중심 G는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

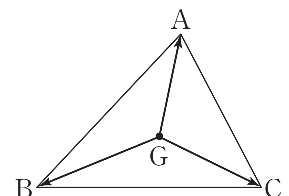
$$\vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{a}}{2+1}=\frac{2\times\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{a}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



문제 4 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 무게중심을 G라고 할 때,

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

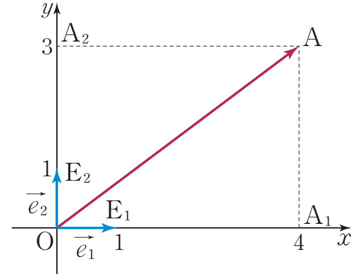
임을 증명하여라.



평면벡터의 성분이란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $E_1(1,\ 0)$, $E_2(0,\ 1)$의 위치벡터를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$라 하고, 점 $A(4,\ 3)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, A_2라고 할 때, 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.



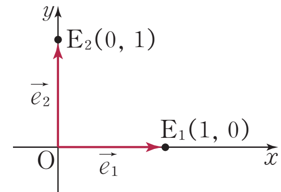
1. 두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$는 각각 두 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$와 평행하므로

$$\overrightarrow{OA_1}=\square\vec{e_1},\quad \overrightarrow{OA_2}=\square\vec{e_2}$$

2. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$이므로

$$\overrightarrow{OA}=\square\vec{e_1}+\square\vec{e_2}$$

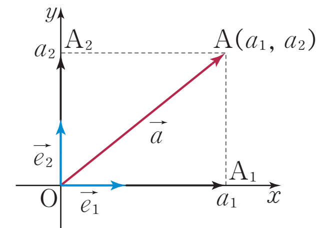
점 O를 원점으로 하는 좌표평면에서 두 점 $E_1(1,\ 0)$, $E_2(0,\ 1)$의 위치벡터 $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$를 각각 단위벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타낸다.



● $|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1$이므로 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$는 단위벡터이다.

이제 좌표평면 위의 임의의 벡터를 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타내어 보자.

임의의 평면벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되는 점 $A(a_1,\ a_2)$에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 $A_1(a_1,\ 0)$, $A_2(0,\ a_2)$라고 하면



$$\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1},\ \overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$$

이고

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$$

이므로

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이때 실수 a_1, a_2를 **벡터 $\vec{a}$의 성분**이라 하고, a_1, a_2를 각각 벡터 $\vec{a}$의 x성분, y성분이라고 한다. 또 평면벡터 $\vec{a}$를 성분을 이용하여

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낸다.

● $\vec{0}=(0,\ 0)$, $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 성분

좌표평면 위의 점 $(a_1,\ a_2)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 하면

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}=(a_1,\ a_2)$$

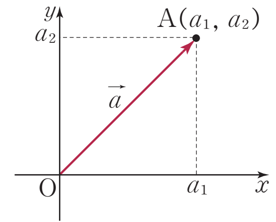
보기 좌표평면에서 원점 O에 대한 점 A$(4,\ 3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 하면

$$\vec{a}=4\vec{e_1}+3\vec{e_2}=(4,\ 3)$$

문제 5 다음 평면벡터를 성분으로 나타내어라. (단, $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$)

(1) $\vec{a}=5\vec{e_1}-3\vec{e_2}$ (2) $\vec{b}=-2\vec{e_1}$

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 A$(a_1,\ a_2)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때, $\vec{a}$를 성분으로 나타내면



$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

이다. 그런데 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이와 같으므로

$$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$$

이다.

또 좌표평면 위의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 서로 같을 조건을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 크기와 두 평면벡터가 서로 같을 조건

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

(2) $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$

보기 $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(x,\ y)$이고 $\vec{a}=\vec{b}$이면

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

(2) $\vec{a}=\vec{b}$이므로 $x=-1,\ y=2$

문제 6 다음 평면벡터의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}=(2,\ 3)$　　(2) $\vec{b}=(3,\ -4)$

문제 7 두 평면벡터 $\vec{a}=(2,\ 4+k)$, $\vec{b}=(l-3,\ 6)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, 실수 k, l의 값을 구하여라.

이제 평면벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 성분을 이용하여 계산하는 방법을 알아보자.

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$와 실수 k에 대하여

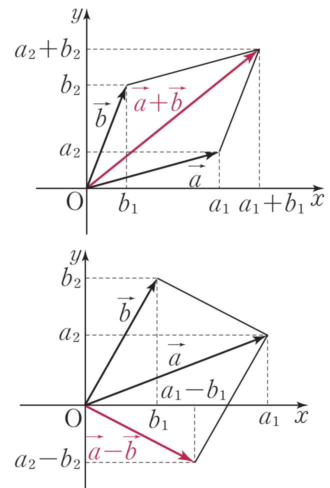
$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2},\quad \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

이므로 벡터의 연산법칙에 의하여 다음이 성립한다.

[1] $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

[2] $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

[3] $k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})$
$=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}$
$=(ka_1,\ ka_2)$



이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(3) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)

예제 03 $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ 4)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내어라.

(1) $\vec{a}+3\vec{b}$　　(2) $2(-\vec{a}+4\vec{b})$

풀이 (1) $\vec{a}+3\vec{b}=(-1,\ 2)+3(-3,\ 4)=(-1,\ 2)+(-9,\ 12)$
$=(-1+(-9),\ 2+12)=(-10,\ 14)$

(2) $2(-\vec{a}+4\vec{b})=-2\vec{a}+8\vec{b}=-2(-1,\ 2)+8(-3,\ 4)$
$=(2,\ -4)+(-24,\ 32)$
$=(2+(-24),\ -4+32)=(-22,\ 28)$

답 (1) $(-10,\ 14)$　(2) $(-22,\ 28)$

문제 8 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ 1)$, $\vec{c}=(5,\ -4)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내어라.

(1) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$　　(2) $3(\vec{a}-2\vec{b})+2(-4\vec{a}+\vec{c})$

예제 04 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 4)$일 때, $\vec{c}=(-5,\ 10)$을 $k\vec{a}+l\vec{b}$의 꼴로 나타내어라.

풀이 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$라고 하면

$$(-5,\ 10)=k(2,\ -1)+l(-3,\ 4)$$
$$=(2k,\ -k)+(-3l,\ 4l)$$
$$=(2k-3l,\ -k+4l)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2k-3l=-5,\ -k+4l=10$$

두 식을 연립하여 풀면 $k=2$, $l=3$이므로 $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$

답 $2\vec{a}+3\vec{b}$

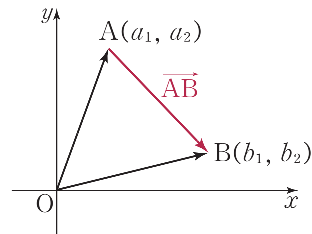
문제 9 $\vec{a}=(-3,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$일 때, $\vec{c}=(-4,\ 8)$을 $k\vec{a}+l\vec{b}$의 꼴로 나타내어라.

발전

문제 10 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$와 실수 t에 대하여 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$의 크기가 최소일 때, 실수 t의 값을 구하여라.

좌표평면 위의 두 점 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하여 보자.

$\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2)$이므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내면



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(b_1, b_2)-(a_1, a_2)\\&=(b_1-a_1, b_2-a_2)\end{aligned}$$

이고, 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 점에 대한 평면벡터의 성분과 크기

좌표평면 위의 두 점 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

보기 두 점 $A(4, 3)$, $B(-2, 5)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2, 5)-(4, 3)=(-2-4, 5-3)=(-6, 2)$

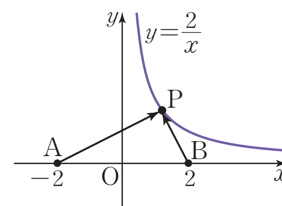
(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-6)^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

문제 11 다음 두 점 A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 성분과 크기를 각각 구하여라.

(1) $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$　　　(2) $A(2, -3)$, $B(1, 5)$

창의 up

좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$과 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ $(x>0)$ 위의 움직이는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값을 구하는 방법을 설명하여라.



02

평면벡터의 내적

● 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

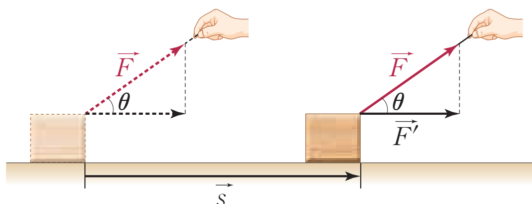
평면벡터의 내적이란 무엇인가?

생각 열기

힘이 한 일

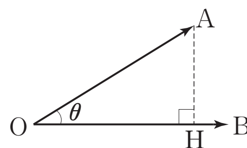
일상생활에서는 방을 청소하거나 설거지를 하는 등 체력을 소모하는 모든 활동을 일이라고 말한다. 하지만 과학에서는 물체에 힘이 작용하여 물체가 움직일 때 일을 했다고 표현하며, 이동 방향으로 작용한 힘의 크기와 물체의 이동 거리의 곱으로 정의한다.

예를 들어 이동 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 방향으로 힘 $\vec{F}$를 작용하여 $|\vec{s}|$만큼 물체를 이동할 때, 물체가 이동하는 방향으로 작용한 힘 $\vec{F'}$의 크기는 $|\vec{F'}|=|\vec{F}|\cos\theta$이다. 이때 힘 $\vec{F}$가 한 일은 $|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$이다.



탐구 활동

오른쪽 그림에서 물체에 작용하는 힘을 나타내는 벡터를 $\overrightarrow{OA}$, 물체의 이동 경로를 나타내는 벡터를 $\overrightarrow{OB}$라고 하자. 각 AOB의 크기를 θ라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



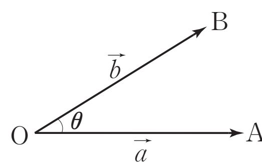
1. 물체의 이동 방향으로 작용한 힘 $\overrightarrow{OH}$의 크기를 $\overrightarrow{OA}$와 θ를 이용하여 나타내어 보자.

2. 힘 $\overrightarrow{OA}$가 한 일을 $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$, θ를 이용하여 나타내어 보자.

평면에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$인 세 점 O, A, B를 정할 때,

$$\angle AOB=\theta\ (0\le\theta\le\pi)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.



이때

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**이라 하고, 기호로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다.

$\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

평면벡터의 내적

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0\le\theta\le\pi)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

예제 01 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하여라.

(1) 0 (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{2}{3}\pi$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터가 아니라 실수이다.

풀이 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos 0=6$ (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=3$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos\frac{\pi}{2}=0$ (4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi=-3$

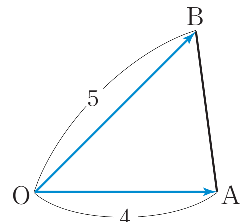
답 (1) 6 (2) 3 (3) 0 (4) -3

문제 1 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하여라.

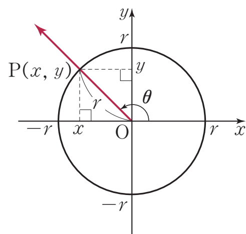
(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{5}{6}\pi$ (4) π

발전

문제 2 오른쪽 그림과 같은 예각삼각형 OAB에서 $|\overrightarrow{OA}|=4$, $|\overrightarrow{OB}|=5$이고 넓이는 $5\sqrt{2}$일 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 값을 구하여라.



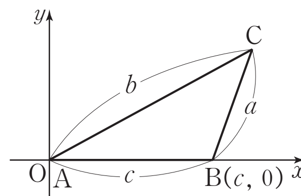
삼각함수의 정의



$\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$,

$\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$

삼각형 ABC를 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 놓았을 때, 삼각함수의 정의에 의하여 점 C의 좌표는



$$\mathrm{C}(b\cos A,\ b\sin A)$$

이므로

$$\begin{aligned}a^2&=\overline{\mathrm{BC}}^2\\&=(c-b\cos A)^2+(0-b\sin A)^2\\&=c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A\\&=c^2-2bc\cos A+b^2(\cos^2 A+\sin^2 A)\end{aligned}$$

이다. 그런데 $\cos^2 A+\sin^2 A=1$이므로

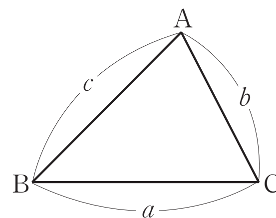
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

가 성립한다. 이와 같은 방법으로

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

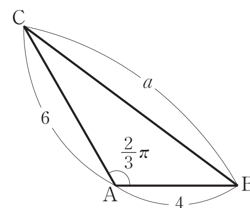
가 성립함을 알 수 있다.

즉, 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 다음과 같은 성질이 성립한다.



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

보기 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 a의 값을 구하면

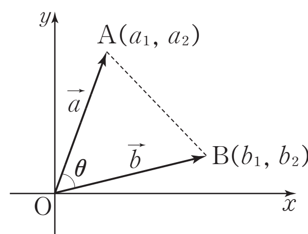


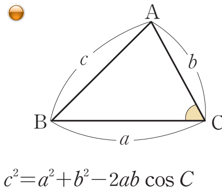
$$a^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\frac{2}{3}\pi=76$$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

이제 삼각형의 성질을 이용하여 평면벡터의 내적을 성분으로 나타내어 보자.

오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라고 하자.





$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

이때 삼각형 OAB에서

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$$

가 성립한다. 여기서

$$\overline{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$
$$\overline{OA}^2=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2$$
$$\overline{OB}^2=|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2$$

이므로

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$$

이다. 즉,

$$\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

이고

$$\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적과 성분

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

보기 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,\ 3)$일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+2\times3=4$

$\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$일 때 $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=1\times0+0\times1=0$

문제 3 다음 두 평면벡터의 내적을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(-2,\ -4)$ (2) $\vec{a}=(-1,\ 1)$, $\vec{b}=(4,\ 5)$

문제 4 두 평면벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(k,\ 6)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

평면벡터의 내적에 대한 연산법칙을 알아보자.

세 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$에 대하여

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=a_1b_1+a_2b_2\\&=b_1a_1+b_2a_2\\&=\vec{b}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

가 성립한다.

또

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2),\ \vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$$

이므로 다음이 성립함도 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=(a_1b_1+a_1c_1)+(a_2b_2+a_2c_2)\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2\\&=(a_1c_1+b_1c_1)+(a_2c_2+b_2c_2)\\&=(a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

한편 임의의 실수 k에 대하여

$$\begin{aligned}(k\vec{a})\cdot\vec{b}&=(ka_1,\ ka_2)\cdot(b_1,\ b_2)\\&=(ka_1)b_1+(ka_2)b_2\\&=k(a_1b_1+a_2b_2)=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

가 성립하고, 이와 같은 방법으로

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

가 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적의 연산법칙

세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (결합법칙)

예제 02 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

증명 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

문제 5 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ (2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

예제 03 두 평면벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$이고 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$일 때, $3\vec{a}-2\vec{b}$의 크기를 구하여라.

풀이 $|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}+4|\vec{b}|^2$

$=9\times1^2-12\times1\times2\times\dfrac{1}{2}+4\times2^2=13$

따라서 $3\vec{a}-2\vec{b}$의 크기는 $|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{13}$이다. **답** $\sqrt{13}$

문제 6 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, $\vec{a}-2\vec{b}$의 크기를 구하여라.

두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라고 하면 내적의 정의에 의하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 평면벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$일 때

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$$

보기 두 평면벡터 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 3)$이 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

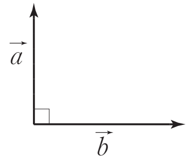
$\cos\theta=\dfrac{1\times1+(-2)\times3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+3^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

문제 7 다음 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}=(2,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ -3)$ (2) $\vec{a}=(0,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ \sqrt{3})$

발전

문제 8 크기가 각각 1인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$을 만족시킬 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하여라.



영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$일 때, 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이라 하고, 기호로

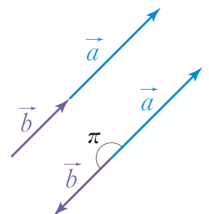
$$\vec{a}\perp\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.

한편 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0$$

이고, 그 역도 성립한다.



또 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 같을 때 $\theta=0$이고, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 반대일 때 $\theta=\pi$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$$

이고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적과 수직 · 평행 조건

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여

(1) 수직 조건: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(2) 평행 조건: $\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$

예제 04 두 평면벡터 $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(x, 4)$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 x의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (2) $\vec{a} /\!/ \vec{b}$

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여 $\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

풀이 (1) $\vec{a} \perp \vec{b}$이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$에서 $-x+8=0$, $x=8$

(2) $\vec{a} /\!/ \vec{b}$이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$에서 $-x+8=\pm\sqrt{5}\sqrt{x^2+16}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$

따라서 $x=-2$

답 (1) 8 (2) -2

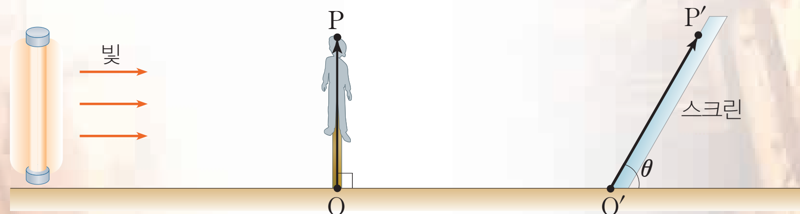
문제 9 두 평면벡터 $\vec{a}=(3, 2)$, $\vec{b}=(x, 6)$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 x의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (2) $\vec{a} /\!/ \vec{b}$

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

다음과 같이 조명 앞에서 바닥에 수직으로 서 있는 그림자 인형이 있다. 이 인형의 막대 끝에 있는 점 O에서 머리의 점 P까지 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 성분은 $(0, 3\sqrt{3})$이라고 할 때, 바닥으로부터 θ만큼 기울어진 스크린에 비추어진 인형의 그림자의 벡터 $\overrightarrow{O'P'}$의 성분은 $(3, 3\sqrt{3})$이다. 이때 스크린이 기울어진 각도 θ를 구하여라. (단, 빛은 그림자 인형의 벡터에 수직이다.)



03 직선과 원의 방정식

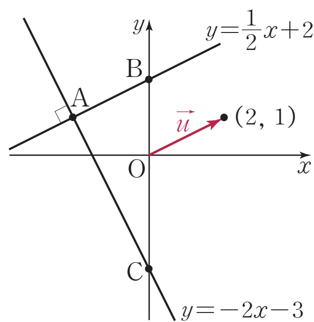
● 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.

좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 수직인 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$, $y=-2x-3$에 대하여 두 직선의 교점을 A, 각 직선이 y축과 만나는 점을 각각 B, C라고 하자.

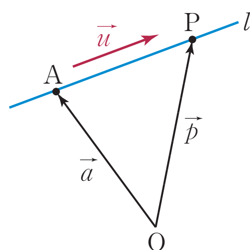
직선 $y=\frac{1}{2}x+2$ 위의 벡터 $\overrightarrow{AB}$, 직선 $y=-2x-3$ 위의 벡터 $\overrightarrow{AC}$와 벡터 $\vec{u}=(2,\ 1)$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



1. 벡터 $\overrightarrow{AB}$는 벡터 $\vec{u}$와 어떤 관계인지 말하여 보자.
2. 벡터 $\overrightarrow{AC}$는 벡터 $\vec{u}$와 어떤 관계인지 말하여 보자.

좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(a,\ b)$에 평행한 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $\overrightarrow{AP}\,/\!/\,\vec{u}$이므로



$$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$$

를 만족시키는 실수 t가 존재한다.

● $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}=t\vec{b}$
(단, t는 0이 아닌 실수)

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$$

이므로 $\vec{p}-\vec{a}=t\vec{u}$에서

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

● ①을 직선 l의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 실수 t의 값이 변함에 따라 점 A를 지나고, 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 직선 l을 나타낸다.

이때 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 **방향벡터**라고 한다.

이제 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내어 보자.

직선 l의 방향벡터가 $\vec{u}=(a,\ b)$이고, $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{p}=(x,\ y)$이므로 ①은

$$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(a,\ b)=(x_1+at,\ y_1+bt)$$

이다. 따라서 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

이다.

● ②를 직선 l의 매개변수방정식이라 하고, t를 매개변수라고 한다.
즉, 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식은 직선의 매개변수 표현이다.

여기서 $ab\neq0$일 때, ②에서 t를 소거하면 다음과 같은 직선 l의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}$$

한편 $ab=0$일 때, ②에서 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

$a=0$, $b\neq0$일 때 직선 l의 방정식은

$$x=x_1$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축과 평행한 직선을 나타낸다.

또 $a\neq0$, $b=0$일 때 직선 l의 방정식은

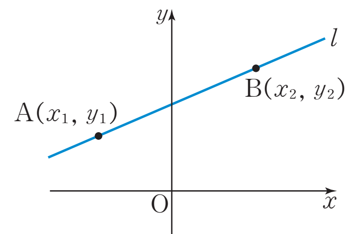
$$y=y_1$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축과 평행한 직선을 나타낸다.

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선 l의 방향벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$$

이고, 이 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은 다음과 같다.



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면에서 직선의 방정식 [1]

(1) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a,\ b)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b} \quad (\text{단, } ab\neq0)$$

(2) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$$

보기 (1) 좌표평면에서 점 A$(4,\ 1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(2,\ -3)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-3}$$

(2) 좌표평면에서 점 A$(1,\ -2)$를 지나고, 벡터 $\vec{u}=(4,\ 0)$에 평행한 직선의 방정식은

$$y=-2$$

(3) 좌표평면에서 두 점 A$(-1,\ -4)$, B$(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x-(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{y-(-4)}{1-(-4)}$이므로 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+4}{5}$

문제 1 좌표평면에서 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 A$(2,\ -1)$을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(-5,\ 3)$인 직선

(2) 점 A$(-1,\ 2)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(0,\ 2)$인 직선

(3) 두 점 A$(2,\ 1)$, B$(-4,\ 1)$을 지나는 직선

예제 01 좌표평면에서 점 A$(3,\ -7)$을 지나고, 직선 $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+5}{-3}$와 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 주어진 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(6,\ -3)$이다.

따라서 구하는 직선은 점 A$(3,\ -7)$을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(6,\ -3)$인 직선이므로

$$\frac{x-3}{6}=\frac{y+7}{-3}$$

답 $\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y+7}{-3}$

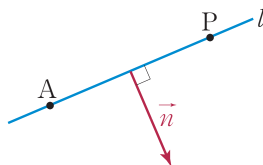
문제 2 좌표평면에서 점 A$(6,\ -2)$를 지나고, 다음 직선과 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $x+2=\dfrac{y-2}{-3}$

(2) $x=1+2t$, $y=-t$ (단, t는 실수)

좌표평면 위의 한 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(n_1,\ n_2)$에 수직인 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라 고 하면 $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$이므로



$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$$

이다.

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

역으로 ①을 만족시키면서 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 직선 l을 나타낸다.

이때 벡터 $\vec{n}$을 직선 l의 **법선벡터**라고 한다.

이제 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내어 보자.

직선 l의 법선벡터가 $\vec{n}=(n_1,\ n_2)$이고, $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{p}=(x,\ y)$이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1)$$

이고, 이것을 ①에 대입하면

$$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(n_1,\ n_2)=0$$

이므로 내적의 정의에 의하여 다음과 같은 직선 l의 방정식을 얻는다.

$$n_1(x-x_1)+n_2(y-y_1)=0$$

법선벡터를 이용하여 나타낸 직선의 방정식은 직선의 방정식을 음함수로 나타낸 것이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면에서 직선의 방정식 [2]

점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(n_1,\ n_2)$에 수직인 직선의 방정식은

$$n_1(x-x_1)+n_2(y-y_1)=0$$

보기 좌표평면에서 점 $A(1,\ 2)$를 지나고, 벡터 $\vec{n}=(2,\ -3)$에 수직인 직선의 방정식은 $2(x-1)-3(y-2)=0$이므로 $2x-3y+4=0$

문제 3 좌표평면에서 점 $A(3,\ 1)$을 지나고, 법선벡터가 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $\vec{n}=(1,\ 2)$ (2) $\vec{n}=(0,\ -1)$

예제 02 좌표평면에서 점 A$(-2,\ 3)$을 지나고, 직선 $\frac{x-1}{3}=5-y$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 직선은 직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{-1}$에 수직이므로 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 수직이다. 즉, 벡터 $\vec{u}$는 직선의 법선벡터이다.
따라서 점 A$(-2,\ 3)$을 지나고, 법선벡터가 $(3,\ -1)$인 직선의 방정식은
$3(x+2)-(y-3)=0$이므로 $3x-y+9=0$

답 $3x-y+9=0$

문제 4 좌표평면에서 점 A$(3,\ -4)$를 지나고, 다음 직선과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $\frac{2-x}{2}=\frac{y}{3}$

(2) 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 지나는 직선

좌표평면에서 두 직선이 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 **좌표평면 위의 두 직선 l_1, l_2가 다음과 같을 때, 물음에 답하여 보자.**

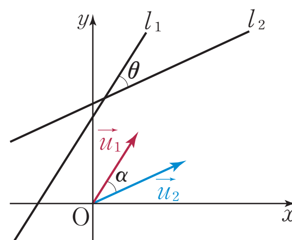
$$l_1:\ \frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{2},\ l_2:\ \frac{x-1}{2}=y+5$$

1. 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라고 할 때, 두 벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 각의 크기를 구하여 보자.

2. 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 구하는 방법을 말하여 보자.

● 두 직선이 이루는 각의 크기 θ는 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.

방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2)$인 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 두 벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 각의 크기를 α라고 할 때, θ는 α와 $\pi-\alpha$ 중에서 크지 않은 쪽이다.



이때 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=|\vec{u_1}||\vec{u_2}|\cos\alpha$이므로 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=|\cos\alpha|=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$$
$$=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}$$

예제 03 좌표평면에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x-2}{3}=y+1,\ l_2:\ \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}$$

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(3,\ 1)$, $\vec{u_2}=(2,\ -1)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|3\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$이다.

답 $\frac{\pi}{4}$

문제 5 좌표평면에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x-1}{\sqrt{3}}=y+3,\ l_2:\ x+1=\frac{y-2}{\sqrt{3}}$$

이제 좌표평면에서 두 직선이 평행할 조건과 수직일 조건에 대하여 알아보자.

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$일 때, 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다.

또 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

이상에서 다음을 알 수 있다.

좌표평면에서 두 직선의 평행 · 수직 조건

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2)$일 때

(1) 평행 조건: $l_1 /\!/ l_2 \iff \vec{u_1}=t\vec{u_2}$ (단, t는 0이 아닌 실수)

$\iff a_1 : b_1 = a_2 : b_2$

(2) 수직 조건: $l_1 \perp l_2 \iff \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$

$\iff a_1a_2+b_1b_2=0$

서로 다른 두 직선
l_1: $y=mx+n$,
l_2: $y=m'x+n'$
$(m\neq0,\ m'\neq0)$
에 대하여
(1) $l_1 /\!/ l_2 \iff m=m',\ n\neq n'$
(2) $l_1 \perp l_2 \iff mm'=-1$

예제 04 좌표평면에서 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$l_1:\ \frac{2-x}{3}=\frac{y-1}{k},\quad l_2:\ x=\frac{y}{-3}$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(-3,\ k)$, $\vec{u_2}=(1,\ -3)$이므로

(1) $l_1 /\!/ l_2$일 때, $\frac{-3}{1}=\frac{k}{-3}$이므로 $k=9$

(2) $l_1 \perp l_2$일 때, $-3\times1+k\times(-3)=0$이므로 $k=-1$

답 (1) 9 (2) -1

문제 6 좌표평면에서 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$l_1:\ \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{6},\ l_2:\ \frac{x+1}{k}=-y$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

창의 up

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$에서 직선 $\frac{x-1}{2}=3-y$에 내린 수선의 발 H의 좌표와 선분 AH의 길이를 구하는 방법을 설명하여라.

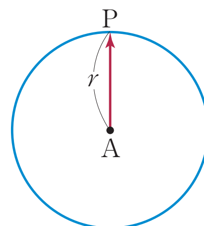
좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 어떻게 구하는가?

좌표평면에서 중심이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 원주 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r$이므로 $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=r$ 즉,

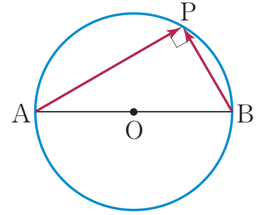
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

이다.



또 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 원주 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로



$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면에서 원의 방정식

(1) 점 $A(x_1,\ y_1)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

(2) 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

예제 05 좌표평면에서 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 $A(-3,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 3인 원

(2) 두 점 $A(1,\ 4)$, $B(3,\ -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원

풀이 (1) $(x+3)^2+(y-2)^2=3^2$

따라서 $(x+3)^2+(y-2)^2=9$이다.

(2) $(x-1)(x-3)+(y-4)(y+2)=0$

$x^2-4x+3+y^2-2y-8=0$

따라서 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$이다.

답 (1) $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ (2) $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

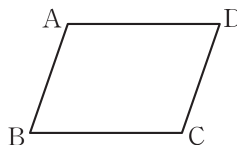
문제 7 좌표평면에서 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 $A(-2,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원

(2) 두 점 $A(1,\ 5)$, $B(7,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원

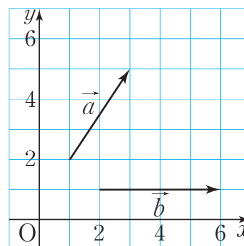
중단원 기초

1 네 점 A, B, C, D의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$라고 하자. 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $\vec{d}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



01 평면벡터의 성분
위치벡터

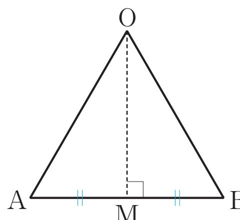
2 오른쪽 그림과 같은 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 성분을 이용하여 나타내고, 그 크기를 구하여라.



01 평면벡터의 성분
평면벡터의 성분과 크기

3 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 OAB에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}$
(3) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$
(4) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$



02 평면벡터의 내적

4 다음 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(3,\ 2)$, $\vec{b}=(-4,\ 6)$
(2) $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ -1)$

02 평면벡터의 내적
두 평면벡터가 이루는 각의 크기

5 좌표평면에서 두 직선 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{k+1}$, $\frac{x-1}{k}=-y$가 수직이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

03 직선과 원의 방정식
두 직선의 수직 조건

[해답 p.212]

중단원 기본

1 삼각형 OAB에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. 선분 AB의 중점을 M, 선분 OM을 3 : 1로 외분하는 점을 N이라고 할 때, $\overrightarrow{AN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

01 평면벡터의 성분
선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

2 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{3}$일 때, $|\vec{a}|$의 값을 구하여라.

02 평면벡터의 내적

3 세 평면벡터 $\vec{a}=(3,\ 6)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$, $\vec{c}=(1,\ 2)$에 대하여 $\vec{a}+k\vec{b}$와 $\vec{c}$가 수직일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

02 평면벡터의 내적
평면벡터의 수직 조건

4 좌표평면에서 점 A$(3,\ -4)$를 지나고 직선 $2x-y+4=0$에 평행한 직선을 매개변수 방정식으로 나타내어라.

03 직선과 원의 방정식
직선의 방정식

5 좌표평면에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x-2}{3}=\frac{5-y}{4},\quad l_2:\ \frac{x+3}{7}=1-y$$

03 직선과 원의 방정식
두 직선이 이루는 각의 크기

중단원 실력

[해답 p.212]

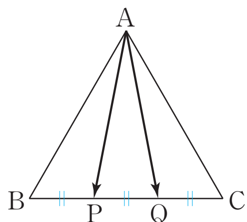
1 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 $5\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$일 때, 삼각형 PAB, PBC, PCA의 넓이의 비를 구하여라.

01 평면벡터의 성분
선분의 내분점

2 좌표평면 위의 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(2,\ 1)$과 직선 $y=x-2$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값을 구하여라.

01 평면벡터의 성분
평면벡터의 크기

3 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이다. 변 BC를 삼등분하는 점을 P, Q라고 할 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값을 구하여라.



02 평면벡터의 내적
평면벡터의 내적의 성질

4 좌표평면 위의 세 직선 l_1, l_2, l_3에 대하여 $l_1 /\!/ l_2$이고, $l_2 \perp l_3$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

$$l_1:\ x+2=\frac{y-1}{2},\quad l_2:\ \frac{x-2}{a}=\frac{y-5}{4},\quad l_3:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y}{b}$$

03 직선과 원의 방정식
두 직선의 평행 · 수직 조건

5 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=6$ 위의 두 점 A$(-1,\ \sqrt{5})$, B$(a,\ b)$에서의 두 접선이 서로 수직일 때, ab의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

03 직선과 원의 방정식
원의 방정식

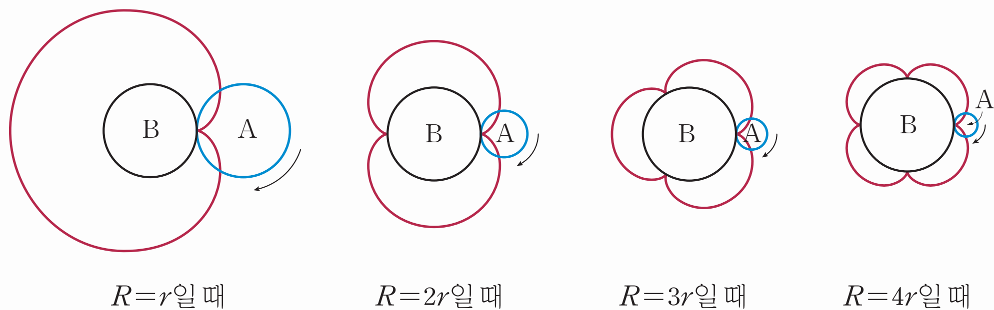
3

평면 운동

에피사이클로이드(epicycloid)

사이클로이드(cycloid)란 직선을 따라 원이 굴러서 회전할 때 원주상의 한 점이 그리는 곡선이다. 이때 원이 직선 위가 아니라 다른 원 위를 굴러서 회전하면 사이클로이드와는 다른 모습의 곡선이 나타난다. 원 A가 고정된 원 B의 바깥쪽을 굴러서 회전할 때, 원 A 위의 한 점이 그리는 곡선을 에피사이클로이드라고 한다.

고정된 원 B의 반지름의 길이 R와 둘레를 굴러 가는 원 A의 반지름의 길이 r 사이의 관계에 따라 곡선의 형태가 달라지는데, 각각의 경우에 대한 에피사이클로이드는 다음과 같다.



$R=r$일 때 $R=2r$일 때 $R=3r$일 때 $R=4r$일 때

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 116쪽

에피사이클로이드와 같은 여러 가지 곡선의 길이를 구할 수 있을까?

01 속도와 가속도

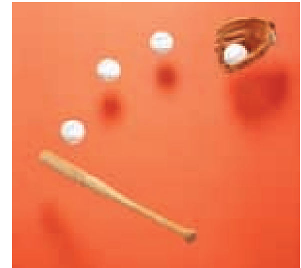
● 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

미분법을 이용하여 속도와 가속도를 어떻게 구하는가?

생각 열기

포물선 운동

지면으로부터 일정한 각도로 던진 물체는 포물선 운동을 한다. 이때 수평 방향으로는 등속 운동을 하고 연직 방향으로는 중력을 받아 등가속도 운동을 한다. 대포에서 쏜 포탄이나 야구 방망이에 맞은 야구공의 운동이 그러한 예이다.

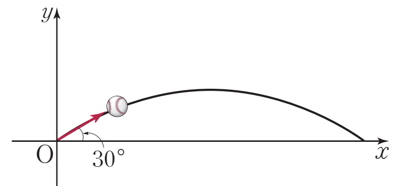


탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 초속 20 m로 수평면과 30°의 각을 이루도록 야구공을 던졌다. t초 후의 야구공의 수평 방향으로의 위치 x가

$$x=20\cos 30^{\circ}\times t$$

라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 위치를 구하여 보자.
2. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 속도를 구하여 보자.
3. $t=3$일 때, 야구공의 수평 방향으로의 가속도를 구하여 보자.

미적분 I
위치와 속도, 가속도의 관계
위치
↓ 미분
속도
↓ 미분
가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 위치 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타내어질 때, 시각 t에서 점 P의 속도 v와 가속도 a는 각각 다음과 같이 정의한다.

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t),\ a=\frac{dv}{dt}=f''(t)$$

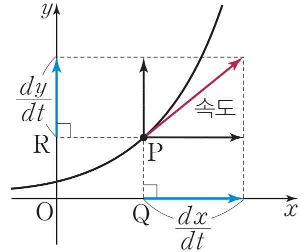
탐구 활동에서 초속 20 m로 수평면과 30°의 각을 이루도록 던진 야구공의 수평 방향으로의 속도와 가속도는 각각 다음과 같다.

$$\text{속도: } \frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(20\cos 30^{\circ}\times t)=20\cos 30^{\circ}=10\sqrt{3}\,(\mathrm{m/s})$$

$$\text{가속도: } \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(10\sqrt{3})=0\,(\mathrm{m/s^2})$$

이제 평면 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 알아보자.

점 P가 좌표평면 위를 움직일 때, 시각 t에서 점 P의 위치를 $(x,\ y)$라고 하면 x, y는 각각 시각 t의 함수이므로 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 점 P의 속도와 가속도를 구하여 보자.



오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 하면 점 P의 움직임에 따라 점 Q는 x축 위에서 $x=f(t)$로 나타내어지는 직선 운동을 하고, 점 R는 y축 위에서 $y=g(t)$로 나타내어지는 직선 운동을 한다.

따라서 시각 t에서 두 점 Q, R의 속도는 각각

$$\frac{dx}{dt}=f'(t),\ \frac{dy}{dt}=g'(t)$$

이다.

이때 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 x성분, y성분으로 하는 벡터

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

를 점 P의 속도라 하고, 벡터 $\vec{v}$의 크기

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

을 점 P의 속도의 크기, 즉 속력이라고 한다.

또 시각 t에서 두 점 Q, R의 가속도는 각각

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t),\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}=g''(t)$$

이다.

이때 $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$을 각각 x성분, y성분으로 하는 벡터

$$\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

을 점 P의 가속도라 하고, 벡터 $\vec{a}$의 크기

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

을 점 P의 가속도의 크기라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때,

(1) 속도 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)=(f'(t), g'(t))$

속력 $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

(2) 가속도 $\vec{a}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t), g''(t))$

가속도의 크기 $|\vec{a}|=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

예제 01

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=2t,\ y=t^2+t$$

일 때, 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt}=2t+1$이므로 $\vec{v}=(2,\ 2t+1)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 $\vec{a}=(0,\ 2)$

답 속도: $(2,\ 2t+1)$, 가속도: $(0,\ 2)$

문제 1 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 다음과 같을 때, 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

(1) $x=t^2,\ y=t^3-2t$

(2) $x=4\cos\dfrac{\pi}{3}t,\ y=4\sin\dfrac{\pi}{3}t$

(3) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$

발전

문제 2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도

(2) 시각 $t=2$에서 점 P의 속력과 가속도의 크기

02 속도와 거리

● 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

정적분을 이용하여 수직선 위를 움직인 거리는 어떻게 구하는가?

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 주어졌을 때, 점 P의 위치를 구하여 보자.

시각 t에서 점 P의 위치를 $x=f(t)$라고 하면 속도 $v(t)$는 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$이다.

$f(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로 시각 $t=t_0$에서의 점 P의 위치를 $f(t_0)=x_0$이라고 하면 $\int_{t_0}^{t} v(t)dt=f(t)-f(t_0)=x-x_0$이다.

따라서 시각 t에서의 점 P의 위치 x는 $x=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt$이다.

또한 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

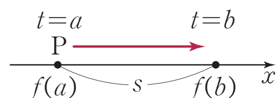
$$f(b)-f(a)=\int_{a}^{b} v(t)dt$$

이다.

이제 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 수직선 위에서 움직인 거리 s를 구하여 보자.

(i) $v(t)>0$일 때

$x=f(t)$는 증가하므로 점 P는 수직선의 양의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t=b$일 때의 위치 $f(b)$에서 시각 $t=a$일 때의 위치 $f(a)$를 뺀 것과 같다. 즉,

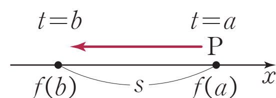


$$s=f(b)-f(a)=\int_{a}^{b} v(t)dt$$

이다.

(ii) $v(t)<0$일 때

$x=f(t)$는 감소하므로 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t=a$일 때의 위치 $f(a)$에서 시각 $t=b$일 때의 위치 $f(b)$를 뺀 것과 같다. 즉,



$$s=f(a)-f(b)=\int_{b}^{a} v(t)dt=-\int_{a}^{b} v(t)dt$$

이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 수직선 위에서 움직인 거리 s는 다음과 같다.

$$s=\int_a^b |v(t)|\,dt$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

수직선 위를 움직이는 점의 위치와 거리

시각 t에서 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도를 $v(t)$, 시각 t_0에서 점 P의 위치를 x_0라고 할 때,

(1) 시각 t에서 점 P의 위치: $x=x_0+\int_{t_0}^t v(t)\,dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량: $\Delta x=\int_a^b v(t)\,dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리: $s=\int_a^b |v(t)|\,dt$

예제 01 시각 t에서 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t)=t^2-4t+3$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서 점 P의 위치

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

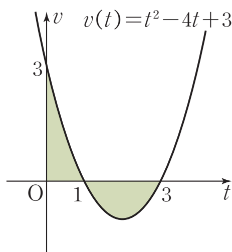
풀이 (1) 시각 t에서의 점 P의 위치는

$$x=0+\int_0^t (t^2-4t+3)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t$$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\Delta x=\int_0^3 (t^2-4t+3)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^3=0$$

(3) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는



$$s=\int_0^3 |t^2-4t+3|\,dt=\int_0^1 (t^2-4t+3)\,dt+\int_1^3 (-t^2+4t-3)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t$ (2) 0 (3) $\frac{8}{3}$

문제 1 시각 t에서 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t)=2\cos\frac{\pi}{4}t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치

(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리

정적분을 이용하여 평면 위에서 점이 움직인 거리는 어떻게 구하는가?

생각 열기

유적 탐방

서울은 우리나라의 수도로서 국제적인 도시일 뿐만 아니라 많은 유적지를 가지고 있는 역사의 도시이다. 서울에는 국보1호인 숭례문과 보물1호인 흥인지문을 비롯하여 유네스코 세계문화유산인 종묘와 창덕궁 등이 있다.



탐구 활동

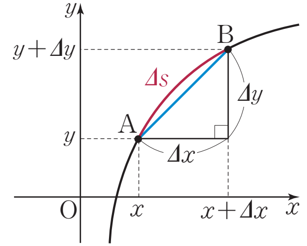
희경이는 흥인지문에서 숭례문까지 가는데 흥인지문에서 동대문 역까지 걸었고 동대문 역에서 지하철을 타고 종로5가-종로3가-종각 역을 거쳐 시청 역에서 내려서 걸어갔다. 지하철과 도보로 이동한 전체 거리를 구하려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 자를 한 번만 사용하여 흥인지문에서 숭례문까지의 길이를 재어 보자.
2. 자를 세 번 사용하여 흥인지문-동대문-시청-숭례문을 연결하고 길이를 더하여 보자.
3. 어떻게 하면 실제 움직인 거리에 가까운 값을 구할 수 있을지 말하여 보자.

점 P가 좌표평면 위를 움직일 때, 시각 t에서 점 P의 위치를 $(x,\ y)$라고 하면 x, y는 각각 시각 t의 함수이므로 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여 보자.

점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t(a\le t\le b)$의 함수이다. 시각 t에서 $\mathrm{A}(x,\ y)$에 있던 점 P가 시각 $t+\Delta t$로 변함에 따라 $\mathrm{B}(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$로 이동했을 때, 움직인 거리 s의 증분 Δs는 Δt가 매우 작을 때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이와 거의 같다.



피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\end{aligned}$$

따라서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 다음과 같다.

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면 위에서 점이 움직인 거리

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

한편 시각 t에서 점 P의 속도 $\vec{v}$가 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$s=\int_a^b|\vec{v}|dt=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

예제 02 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=\frac{1}{3}t^3-t$, $y=-t^2$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

풀이 $\frac{dx}{dt}=t^2-1$, $\frac{dy}{dt}=-2t$이므로 $\vec{v}=(t^2-1,\ -2t)$

따라서 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$s=\int_0^1\sqrt{(t^2-1)^2+(-2t)^2}dt=\int_0^1(t^2+1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

문제 2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=3t^2$, $y=t^3-3t+1$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

문제 3 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=\cos t$, $y=\sin t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

단원 과제

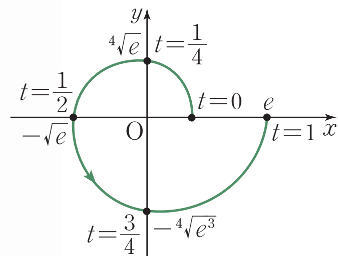
앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

평면 위에서 운동하는 점이 움직인 거리를 구하는 방법을 이용하여 다음과 같은 나선형 모양의 곡선의 길이도 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=e^t\cos 2\pi t,\ \ y=e^t\sin 2\pi t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하여라.



[해답 p.213]

1 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=4t,\ y=t^2-1$$

일 때, 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

01 속도와 가속도

2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=3t,\ y=-2t^2+4t$$

이다. 점 P의 속도의 크기가 최소가 될 때의 시각을 구하여라.

01 속도와 가속도
속력

3 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\frac{5}{3}t^3-t+2,\ y=\sqrt{5}t^2+4$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

4 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=3\sin t+4\cos t,\ y=4\sin t-3\cos t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

중단원 기본

1 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

일 때, 시각 $t=1$에서 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

01 속도와 가속도

2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=-1+\sin 2t,\ y=\cos 2t+t$$

일 때, 점 P의 속력의 최댓값을 구하여라.

01 속도와 가속도
속력

3 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$$

이다. 점 P의 속력이 $\sqrt{2}e^2$일 때의 시각을 구하여라.

01 속도와 가속도
속력

4 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=3t^2,\ y=t^3-3t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 점 P의 속력이 30이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

5 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\ln t,\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

일 때, 시각 $t=\frac{1}{e}$에서 $t=e$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

중단원 실력

[해답 p.213]

수준별 학습

1 시각 t에서 타원 $x^2+16y^2=1$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 속도의 x성분이 3이라고 한다. 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 y좌표가 양수일때, 속도의 y성분을 구하여라.

01 속도와 가속도
속도

2 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)$$

일 때, 시각 $t=2$에서 점 P의 속력을 구하여라.

01 속도와 가속도
속력

3 곡선 $y=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{x}$에 대하여 $x=1$에서 $x=2$까지 곡선의 길이를 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

4 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\frac{1}{2}t^2-2t,\ y=\frac{4\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t}$$

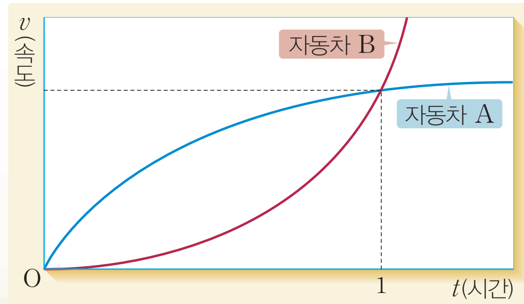
일 때, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 6이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하여라.

02 속도와 거리
움직인 거리

수행 과제

시간 - 속도 그래프의 해석

다음 그래프는 두 자동차 A, B의 시간에 따른 속도의 변화를 나타낸 것이다. 두 자동차 A, B가 같은 지점에서 출발하여 같은 방향으로 달린다고 가정했을 때, 주어진 그래프를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.



| 과 제 | 1 출발 1시간 후 두 자동차의 위치 사이의 관계를 설명하여 보자.

| 과 제 | 2 출발 1시간 후 두 자동차의 속도 사이의 관계를 설명하여 보자.

| 과 제 | 3 출발 1시간 후 두 자동차의 가속도 사이의 관계를 설명하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 벡터의 연산

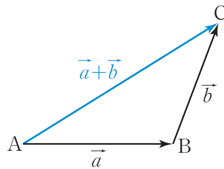
벡터의 뜻

크기와 방향을 함께 가지는 양

벡터의 덧셈과 뺄셈

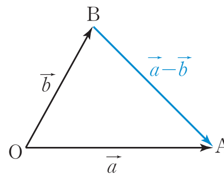
(1) 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$에 대하여

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



(2) 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$에 대하여

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$



벡터의 실수배

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, 실수 k에 대하여 $k\vec{a}$는

① $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기는 $k|\vec{a}|$이다.

② $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기는 $|k||\vec{a}|$이다.

③ $k=0$이면 $\vec{0}$이다.

(2) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a} \text{ (단, } k\text{는 0이 아닌 실수)}$$

2 평면벡터의 성분과 내적

위치벡터

점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 위치벡터라 한다.

평면벡터의 성분

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

(2) $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$

(3) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

(4) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(5) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)

평면벡터의 내적

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

평면벡터의 내적과 수직 · 평행 조건

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

(1) 수직 조건: $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(2) 평행 조건: $\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

좌표평면에서 직선의 방정식

(1) 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a,\ b)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b} \text{ (단, } ab\neq0\text{)}$$

(2) 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(n_1,\ n_2)$에 수직인 직선의 방정식은

$$n_1(x-x_1)+n_2(y-y_1)=0$$

좌표평면에서 원의 방정식

점 $A(x_1,\ y_1)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

3 평면 운동

평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 속도와 속력, 가속도와 가속도의 크기

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\ |\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right),\ |\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

평면 위에서 점이 움직인 거리

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

용어와 기호 벡터, 시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 평면벡터, 영벡터, 실수배, 위치벡터, 벡터의 성분, 내적, 방향벡터, 법선벡터, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $|\vec{a}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 등식 $4\vec{x}-3\vec{a}=2\vec{b}+\vec{x}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면?

① $\vec{x}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ ② $\vec{x}=-\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$
③ $\vec{x}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ ④ $\vec{x}=\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$
⑤ $\vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$

2 두 점 A, B에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. 점 B가 선분 AC의 중점이 되도록 점 C를 잡을 때, $\overrightarrow{OC}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면?

① $\vec{a}+\vec{b}$ ② $\vec{a}+2\vec{b}$ ③ $-\vec{a}+2\vec{b}$
④ $-\vec{a}+\vec{b}$ ⑤ $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

3 세 평면벡터

$\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ -1)$, $\vec{c}=(1,\ -5)$

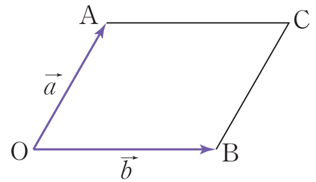
에 대하여 $\vec{c}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$를 만족시키는 실수 k_1, k_2의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

4 평면 위의 서로 다른 세 점 $A(-2,\ t)$, $B(2,\ -3)$, $C(6,\ -1)$이 한 직선 위에 있도록 하는 실수 t의 값은?

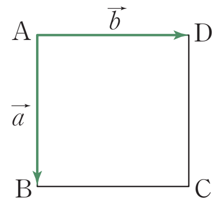
① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

5 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 OBCA에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$일 때, 평행사변형 OBCA의 넓이는?



① 10 ② $10\sqrt{3}$ ③ 20
④ $20\sqrt{3}$ ⑤ 30

6 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 할 때, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7 두 평면벡터 $\vec{a}=(3,\ -4)$, $\vec{b}=(7,\ -1)$이 이루는 각의 크기는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

8 두 평면벡터 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ 1-x)$에 대하여 $\vec{a}\perp\vec{b}$를 만족시키는 x의 값을 p, $\vec{a}/\!/\vec{b}$를 만족시키는 x의 값을 q라고 할 때, $p+2q$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9 좌표평면에서 두 직선 $x+\sqrt{3}y-1=0$과 $ax-y=0$이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, a의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

10 시각 t에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이고 있는 점 P의 x좌표와 y좌표가

$$x=\cos 2t,\ y=\sin 2t$$

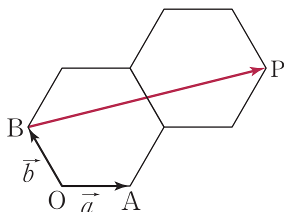
일 때, 시각 t에서 점 P의 가속도의 크기는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

서답형

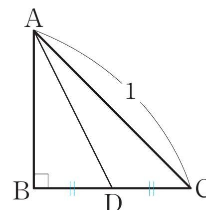
11 $\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c})$를 간단히 하여라.

12 오른쪽 그림과 같이 정육각형 두 개가 한 변을 공유하고 있다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{BP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



13 삼각형 ABC의 내부에 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$가 성립하도록 점 P를 잡는다. 삼각형 ABC의 넓이가 90일 때, 삼각형 PAB, PBC, PCA의 넓이를 각각 구하여라.

14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}=1$인 직각이등변 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 D라고 할 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$의 값을 구하여라.



서술형

15 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$이면 $\vec{a}\perp\vec{b}$임을 보여라.

서술형

16 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 속도 $\vec{v}$가

$$\vec{v}=(e^t(\sin t+\cos t),\ e^t(\sin t-\cos t))$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

M+ Real Life

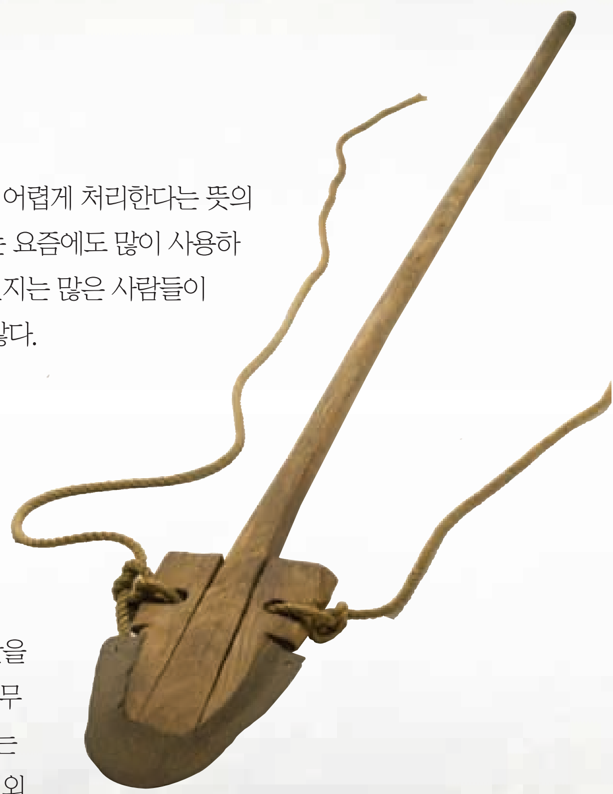


수 학 + 실 생 활

벡터의 합

우리나라 속담에 쉽게 마무리 할 수 있었던 일을 나중에 어렵게 처리한다는 뜻의 '호미로 막을 일을 가래로 막는다.' 라는 말이 있다. 호미는 요즘에도 많이 사용하고 있기 때문에 어떻게 생겼고 어디에 사용되는 농기구인지는 많은 사람들이 잘 알고 있지만, 가래는 어떤 농기구인지 모르는 사람이 많다.

가래는 삽처럼 생긴 가랫날의 양 귀퉁이에 끈을 묶어서 두 사람이 양쪽에서 잡아당기고, 또 다른 한 사람은 가래의 손잡이를 붙들고 힘과 방향을 조절하는 농기구이다. 가래를 사용하면 땅을 깊게 파거나 흙을 멀리 던져 보내는 힘든 일도 쉽게 할 수 있다. 쇠가 귀하던 옛날의 가래는 나무판을 깎아 만든 후 테두리에만 쇠를 끼웠고 쇠날이 무뎌질 때마다 대장간에서 교체하여 사용하였는데, 근래의 가래는 삽과 같이 손잡이를 제외하고는 모두 쇠로 제작한다.


가래



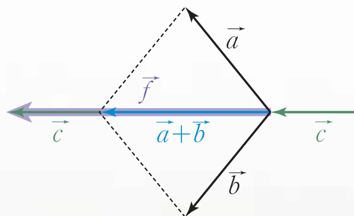
가래를 사용하면 작은 힘을 하나로 합쳐서 큰 힘을 만들 수 있는데, 가래와 같은 원리를 이용하는 또 다른 기구로 두레가 있다. 두레는 보통 농촌에서 농사일을 공동으로 하기 위하여 마을에 둔 조직을 뜻하지만 여기서 말하는 두레는 낮은 곳에서 높은 곳으로 물을 퍼 올리는 농기구이다. 두레는 바가지에 끈을 묶은 후 두 사람이 양쪽에서 잡아당겨서 물을 퍼 올리는 방식으로 사용한다.


두레

가래나 두레와 같이 여러 방향으로 힘을 주어 하나의 기구를 움직이는 경우는 벡터를 사용하면 수학적으로 정확히 표현할 수 있다.

가래는 두 사람이 양쪽에서 잡아당기고, 또 다른 한 사람은 가래 손잡이를 붙들고 힘과 방향을 조절하므로 3개의 벡터로 나타내어야 한다. 이때 양쪽에서 잡아당기는 힘을 각각 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 손잡이에 주는 힘을 벡터 $\vec{c}$라고 하자. 이 세 벡터의 합을 구하면 가래의 힘인 벡터 $\vec{f}$가 나온다.



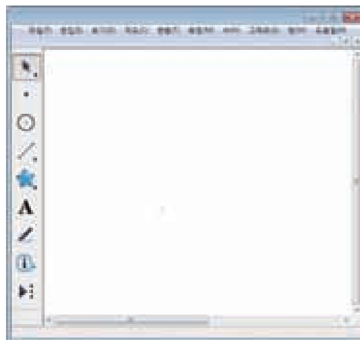


이와 같은 원리에 따라 가래는 세 사람의 힘을 합쳐 큰 힘을 낼 수 있다.

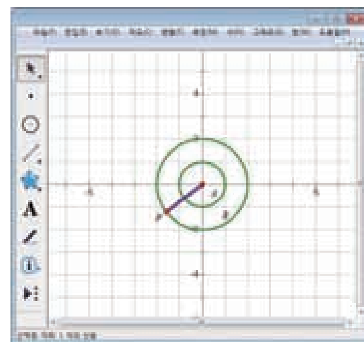
수 학 ✚ 실 생 활

M+

에피사이클로이드 그리기



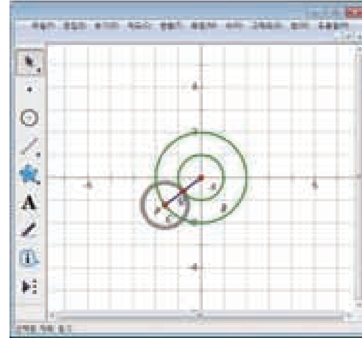
컴퓨터 프로그램을 이용하여 반지름의 길이가 1인 원 위를 반지름의 길이가 같은 원이 굴러서 바깥쪽으로 회전할 때, 구르는 원 위의 한 점이 그리는 곡선인 에피사이클로이드를 그릴 수 있다.



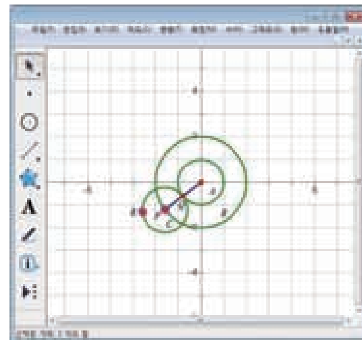
1. [그래프]–[격자 형태]–[정사각좌표 격자]를 선택한다.
2. 원 도구 ⊙ 을 선택하여 반지름의 길이가 1이고 중심이 원점인 원 A를 작도한다.
3. [그래프]–[점을 격자에 맞추기]를 선택한다.
4. 원 도구 ⊙ 을 선택하여 반지름의 길이가 2이고, 중심이 원점인 원 B를 작도한다. 그리고 [그래프]–[점을 격자에 맞추기]를 다시 선택하여 기능을 해제한다.
5. 점 도구 · 을 선택하여 원 B 위에 점 P를 찍는다.
6. 선 도구 ⁄ 을 선택하여 점 P와 원점을 연결한다.



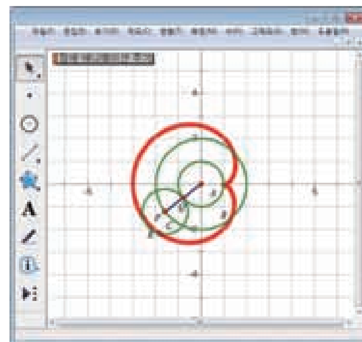
7. 화살표 도구 ![arrow] 을 선택하고 6에서 연결한 선분이 선택된 상태에서 원 A를 선택한다.
8. [작도]–[교점]을 선택하여 교점 Q를 작도한다.
9. 원 도구 ![circle] 을 선택하여 점 P를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 원 C를 작도한다.

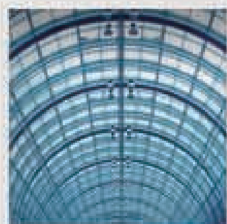
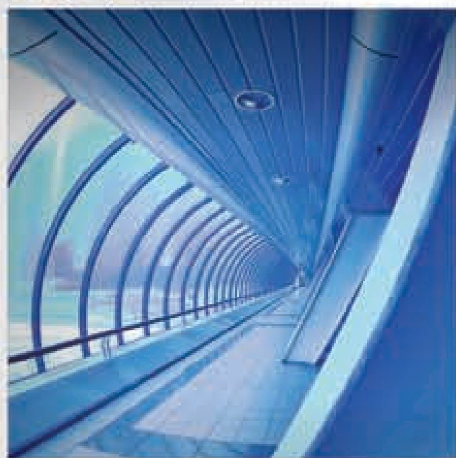
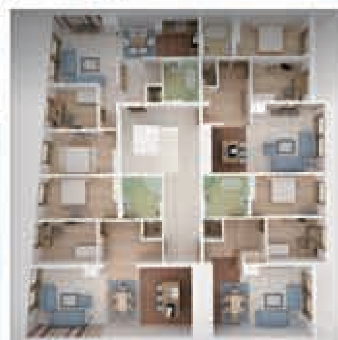


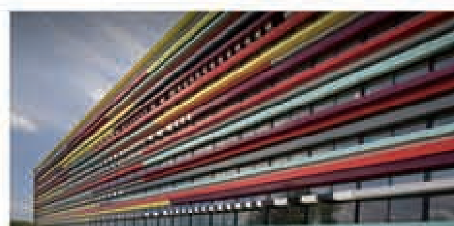
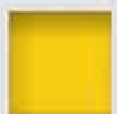
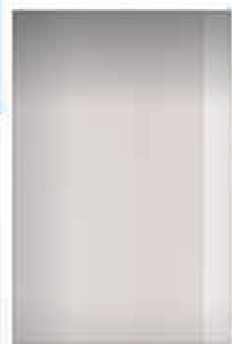
10. 점 도구 ![point] 을 선택하여 원 C 위에 점 R를 찍는다.
11. [보기]–[점의 흔적남기기]를 선택한다.
12. 화살표 도구 ![arrow] 을 선택하여 점 R가 선택된 상태에서 점 P를 선택한다.
13. [편집]–[동작 버튼]–[애니메이션]을 선택하고 확인을 선택한다.



14. 왼쪽 상단에 나타난 [애니메이션:점] 버튼을 누르면 다음과 같은 에피사이클로이드의 곡선이 나타난다.



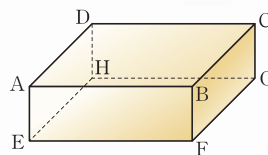

우리 주변의 많은 도형들은 점, 선, 면으로 이루어져 있다.

공간도형과 공간벡터

준비학습

중① 공간에서 두 직선의 위치 관계

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 다음을 구하여라.



(1) 모서리 DC와 꼬인 위치에 있는 모서리

(2) 면 BFGC에 평행하고, 모서리 AB와 수직으로 만나는 모서리

수학 I 평면좌표

2 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 7)$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 두 점 A, B 사이의 거리

(2) 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표

(3) 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표

수학 I 원의 방정식

3 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 $A(3,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 4인 원

(2) 두 점 $A(0,\ 0)$, $B(8,\ 6)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원

1

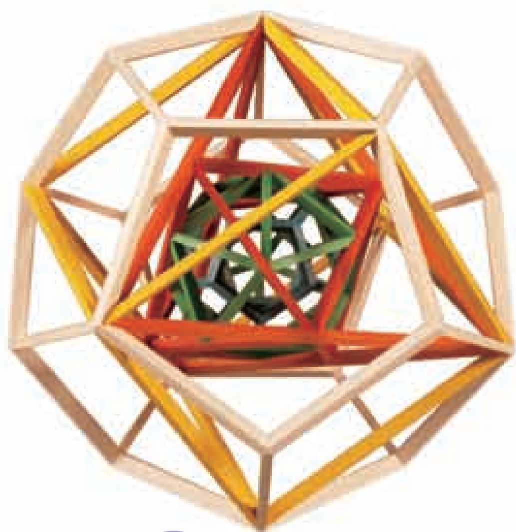
공간도형

정다면체

공간에는 서로 다른 모양의 수많은 다면체가 존재한다. 이 다면체 중에서 각 면이 모두 합동이고, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 같은 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체로 다섯 종류뿐이다.

정다면체는 고대 그리스에서 처음으로 연구하기 시작하였고, 수학자들은 정다면체를 가장 아름답고 완벽한 도형으로 생각하여 많은 관심을 가졌다. 그리고 15세기에 이르러 다섯 종류의 정다면체가 그 안에 서로 다른 정다면체를 품고 품으며 끝없이 순환한다는 성질을 발견하였다. 정다면체가 순환하는 경로는 '정사면체 ← 정육면체 ← 정십이면체 ← 정이십면체 ← 정팔면체 ← 정사면체' 로 유일한데, 이 순서를 지키면 정다면체는 자기 자신으로 되돌아올 수 있다.

이와 같은 정다면체의 순환은 정다면체의 모서리의 길이와 면과 면 사이의 각도를 이용하여 알아낼 수 있다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 142쪽

다섯 종류의 정다면체에서 하나의 모서리를 공유하는 두 면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있을까?

01

직선, 평면의 위치 관계

● 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

평면을 결정하는 조건은 무엇인가?

생각 열기

삼각대



온라인 커뮤니티 게시판에 '삼각대 필요 없는 사진사' 라는 사진이 게재되어 화제가 되었다. 사진에는 많은 사람들이 삼각대를 펼치고 사진을 찍는 데 비해, 한 남자만이 한쪽 팔을 쭉 뻗고 카메라를 든 채로 사진을 찍고 있는 모습이 담겨 있다. 이 남자는 2012년 런던 올림픽에서 사격으로 금메달을 획득한 진종오 선수로, 권총 대신 카메라를 합성한 것이다.

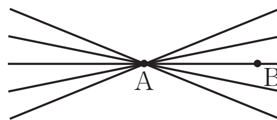
탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

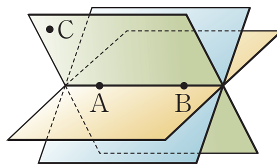
1. 카메라를 세워 놓고 사진을 촬영할 때 흔들리지 않도록 지면에 고정시키려면 몇 개의 다리가 필요한지 말하여 보자.
2. 사진을 촬영할 때 카메라를 고정시키는 삼각대와 알코올램프를 사용할 때 필요한 삼발이는 모두 다리가 3개이다. 삼각대와 삼발이의 다리가 3개인 이유에 대하여 알아보자.

평면이 결정되는 조건에 대하여 알아보자.

공간에서 한 점 A를 지나는 직선은 무수히 많이 존재하지만 이들 직선 중에서 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선은 오직 하나만 존재한다. 따라서 서로 다른 두 점은 하나의 직선을 결정한다.



이와 마찬가지로 공간에서 두 점 A, B를 지나는 평면은 무수히 많이 존재하지만 이들 평면 중에서 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 오직 하나만 존재한다. 따라서 한 직선 위에 있지 않은 세 점은 하나의 평면을 결정한다.



공간도형에서 보통 점은 A, B, C, …와 같이 알파벳 대문자로 나타내고, 직선은 l, m, n, …과 같이 알파벳 소문자로 나타낸다. 또 평면은 α, β, γ, …와 같이 그리스 알파벳 소문자로 나타낸다.

일반적으로 공간에서 다음과 같은 경우에 평면이 하나로 결정된다.

평면의 결정조건

(1) 한 직선 위에 있지 않은 세 점　　(2) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

(3) 한 점에서 만나는 두 직선　　(4) 평행한 두 직선

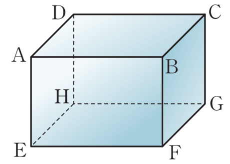


보기 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서

(1) 세 점 A, B, C　　(2) 직선 AB와 점 C

(3) 직선 AB와 직선 BC　　(4) 직선 AD와 직선 BC

는 모두 하나의 평면 ABCD를 결정한다.



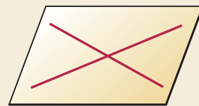
문제 1 공간에서 서로 다른 네 점 A, B, C, D 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다고 할 때, 이 네 점에 의하여 결정되는 서로 다른 평면의 개수의 최솟값과 최댓값을 각각 구하여라.

공간에서 위치 관계는 어떠한 것이 있는가?

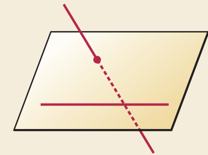
공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계는 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계

(1) 한 점에서 만난다.　　(2) 평행하다.　　(3) 꼬인 위치에 있다.







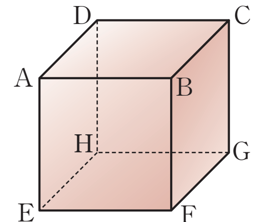
한 평면 위에 있다.　　한 평면 위에 있지 않다.

문제 2 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음을 구하여라.

(1) 모서리 AB와 만나는 모서리

(2) 모서리 AB와 평행한 모서리

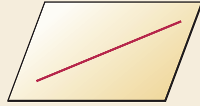
(3) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리



공간에서 직선과 평면의 위치 관계는 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

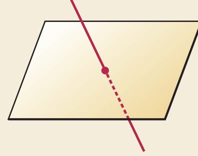
공간에서 직선과 평면의 위치 관계

(1) **포함된다.**



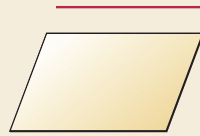
무수히 많은 점을 공유한다.

(2) **한 점에서 만난다.**



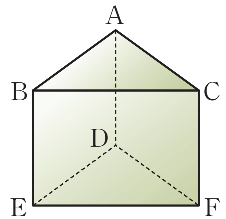
한 점을 공유한다.

(3) **평행하다.**



공유하는 점이 없다.

문제 3 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 면 ABC와 다음 위치 관계에 있는 모서리를 모두 구하여라.



(1) 포함된다.

(2) 한 점에서 만난다.

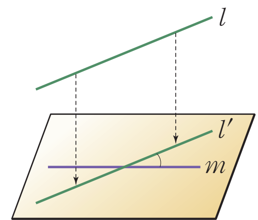
(3) 평행하다.

공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면에서 두 직선이 이루는 각을 정할 수 있다.

한편 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있지 않으므로 두 직선이 이루는 각을 다음과 같이 정한다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l과 m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 l을 직선 m과 한 점에서 만나도록 평행이동한 직선을 l'이라고 하면 두 직선 l'과 m은 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l'과 m이 이루는 각을 두 직선 l과 m이 이루는 각이라고 한다.



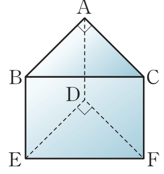
● 두 직선이 이루는 각의 크기는 보통 크기가 작은 쪽의 각을 생각한다.

특히 두 직선 l과 m이 이루는 각이 직각일 때, 두 직선 l과 m은 수직이라 하고, 기호로

$$l \perp m$$

과 같이 나타낸다.

보기 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 직선 DF를 평행이동하면 직선 AC와 일치하고, 두 직선 AB, AC가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이므로 두 직선 AB, DF가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

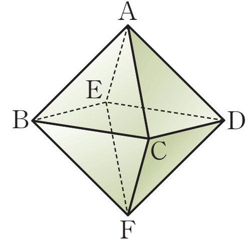


문제 4 오른쪽 그림과 같은 정팔면체에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

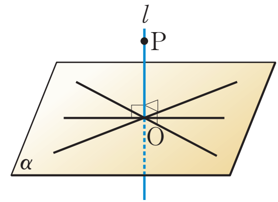
(1) 직선 BC와 직선 BE

(2) 직선 AB와 직선 CD

(3) 직선 AE와 직선 DF



공간에서 직선 l이 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 수직이라 하고, 기호로 $l \perp \alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점 O를 수선의 발이라고 한다.



예제 01 평면 α와 한 점 O에서 만나는 직선 l이 평면 α 위의 점 O에서 만나는 서로 다른 두 직선 a, b와 수직이면 직선 l과 평면 α는 수직임을 증명하여라.

평면 α와 직선 l이 한 점 O에서 만나므로 $l \perp \alpha$임을 보이려면 직선 l이 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선과 수직임을 보이면 된다.

증명 오른쪽 그림과 같이 두 직선 a, b 위에 각각 점 A, B를 잡고, 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선을 c, 직선 AB와 직선 c의 교점을 C라고 하자.

직선 l 위에 $\overline{OP}=\overline{OP'}$인 두 점 P, P′을 잡으면 두 직선 a, b는 모두 $\overline{PP'}$의 수직이등분선이 된다.

$\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\overline{BP}=\overline{BP'}$, $\overline{AB}$는 공통

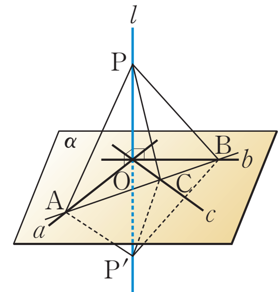
따라서 $\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$이므로 $\angle PAC = \angle P'AC$이다.

$\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\angle PAC = \angle P'AC$, $\overline{AC}$는 공통

따라서 $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$이므로 $\overline{PC}=\overline{P'C}$이다.

삼각형 PCP′은 이등변삼각형이고 점 O는 $\overline{PP'}$의 중점이므로 $\overline{PP'} \perp \overline{OC}$ 즉, $l \perp c$이다.

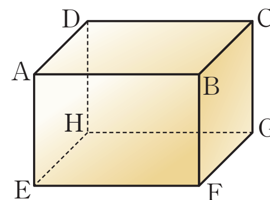
따라서 직선 l은 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선과 수직이므로 $l \perp \alpha$이다.



문제 5 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 다음을 구하여라.

(1) 모서리 AB와 수직인 면

(2) 면 ABCD와 수직인 모서리

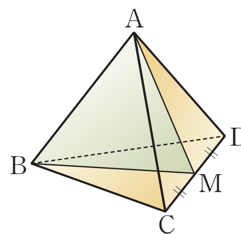


예제 02 정사면체 ABCD에서 모서리 CD의 중점을 M이라고 할 때, 모서리 CD와 면 ABM이 수직임을 증명하여라.

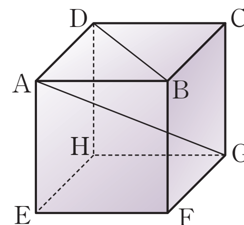
증명 삼각형 ACD와 삼각형 BCD는 정삼각형이고, 점 M은 모서리 CD의 중점이므로

$$\overline{CD}\perp\overline{AM},\ \overline{CD}\perp\overline{BM}$$

따라서 모서리 CD가 면 ABM 위의 점 M에서 만나는 두 선분 AM, BM과 수직이므로 모서리 CD와 면 ABM은 수직이다.



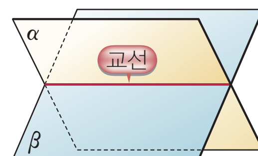
문제 6 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 대각선 AG와 선분 BD가 이루는 각의 크기를 구하여라.



공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계에 대하여 알아보자.

공간에서 서로 다른 두 평면은 만나는 경우와 만나지 않는 경우가 있다.

서로 다른 두 평면 α, β가 만나는 경우, 만나는 점들의 집합은 직선을 이룬다. 이때 이 직선을 두 평면의 **교선**이라고 한다.



한편 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않으면 두 평면 α, β는 평행하다고 하며, 기호로

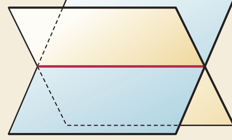
$$\alpha /\!/ \beta$$

와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

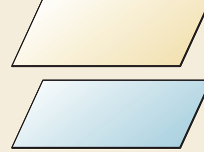
공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계

(1) **만난다.**



한 직선을 공유한다.

(2) **평행하다.**



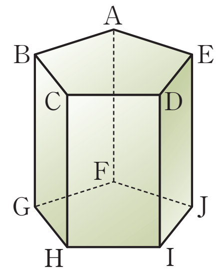
공유하는 점이 없다.

문제 7 오른쪽 그림과 같은 오각기둥에서 다음을 구하여라.

(1) 모서리 AF가 교선인 면

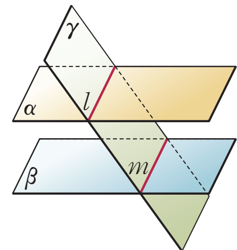
(2) 면 BGHC와 만나는 면

(3) 서로 평행한 면

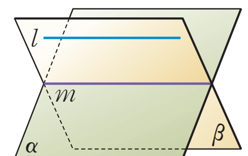


예제 03 평행한 두 평면 α, β가 다른 평면 γ와 만나서 생기는 교선을 각각 l, m이라고 할 때, $l /\!/ m$임을 증명하여라.

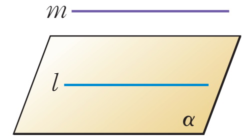
증명 두 평면 α, β는 평행하므로 만나지 않는다.
따라서 평면 α 위에 있는 직선 l과 평면 β 위에 있는 직선 m도 만나지 않는다.
그런데 두 직선 l, m은 모두 한 평면 γ 위에 있으므로
$l /\!/ m$이다.



문제 8 오른쪽 그림과 같이 직선 l과 평면 α가 평행하고 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α의 교선을 m이라고 할 때, $l /\!/ m$임을 증명하여라.



문제 9 오른쪽 그림과 같이 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 평면 α가 있다. 두 직선 l과 m이 평행할 때, 평면 α와 직선 m이 평행함을 증명하여라.



예제 04 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나는 두 직선 l, m이 모두 평면 α에 평행할 때, 두 직선 l, m을 포함하는 평면 β는 α와 평행함을 증명하여라.

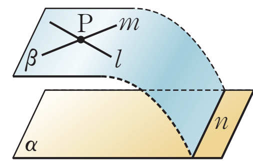
증명 두 평면 α, β가 평행하지 않다고 가정하면 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β는 교선 n을 공유한다. 이때 $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$ 이므로

$$l /\!/ n,\ m /\!/ n$$

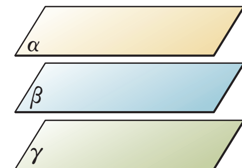
이고, 세 직선 l, m, n이 모두 평면 β 위에 있으므로

$$l /\!/ m$$

이다. 이것은 두 직선 l, m이 한 점 P에서 만나는 것에 모순이다.
따라서 평면 α와 β는 평행하다.



문제 10 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 두 평면 α와 β가 평행하고, 두 평면 β와 γ가 평행하면 두 평면 α와 γ가 평행함을 증명하여라.



사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

서로 다른 세 직선 l, m, n과 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 말하고, 직육면체를 이용하여 그 이유를 설명하여 보자.

(1) $l /\!/ m$, $m /\!/ n$이면 $l /\!/ n$이다.

(2) $l /\!/ \alpha$, $l /\!/ \beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$이다.

(3) $\alpha /\!/ l$, $\alpha /\!/ m$이면 $l /\!/ m$이다.

02 삼수선의 정리

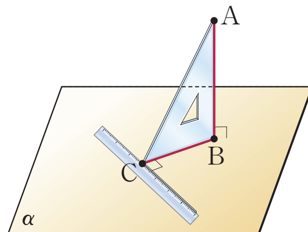
● 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

삼수선의 정리란 무엇인가?

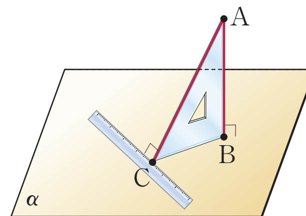
탐구 활동

●준비물
자, 직각 삼각자, 각도기

다음 그림과 같이 직각 삼각자 ABC를 변 AB가 평면 α에 수직이 되도록 세울 때, 물음에 답하여 보자.



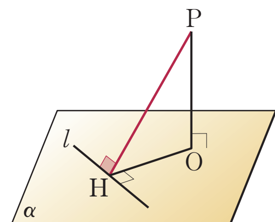
〈그림 1〉



〈그림 2〉

1. 〈그림 1〉과 같이 자를 직각 삼각자의 변 BC와 수직이 되도록 평면 α 위에 놓을 때, 변 AC와 자가 이루는 각의 크기를 각도기를 이용하여 구하여 보자.

2. 〈그림 2〉와 같이 자를 직각 삼각자의 변 AC와 수직이 되도록 평면 α 위에 놓을 때, 변 BC와 자가 이루는 각의 크기를 각도기를 이용하여 구하여 보자.



오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 α 위의 한 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

이때 $\overline{PO}\perp\alpha$이고 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO}\perp l$이다. 또 $\overline{OH}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{PO}$와 $\overline{OH}$에 의하여 결정되는 평면 PHO와 수직이다.

● $\overline{PO}\perp\alpha$이면 $\overline{PO}$는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

그런데 $\overline{PH}$는 평면 PHO 위에 있으므로

$$\overline{PH}\perp l$$

이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\overline{PO}\perp\alpha,\ \overline{OH}\perp l \text{이면 } \overline{PH}\perp l$$

일반적으로 공간에서 직선과 평면의 수직 관계에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 **삼수선의 정리**라고 한다.

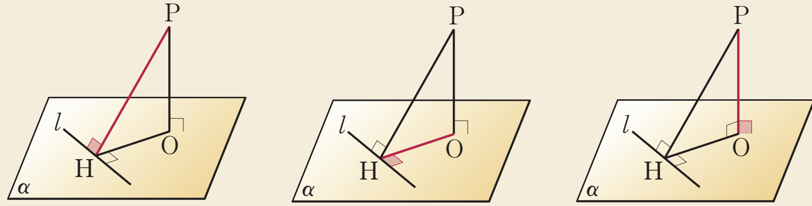
삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 점 O를 지나지 않는 α 위의 한 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H에 대하여

(1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$ **이면** $\overline{PH}\perp l$

(2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$ **이면** $\overline{OH}\perp l$

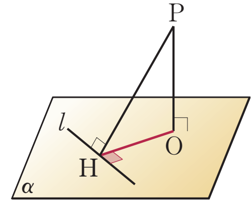
(3) $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$ **이면** $\overline{PO}\perp\alpha$



예제 **01** 삼수선의 정리 (2)를 증명하여라.

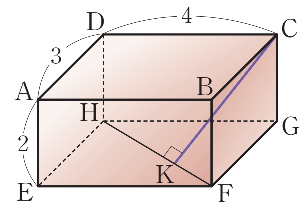
증명 $\overline{PO}\perp\alpha$이고, 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO}\perp l$이다.
또 $\overline{PH}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{PO}$, $\overline{PH}$에 의하여 결정되는 평면 PHO와 수직이다. 그런데 $\overline{OH}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{OH}\perp l$이다.
따라서 다음이 성립한다.

$$\overline{PO}\perp\alpha,\ \overline{PH}\perp l \text{이면}\quad \overline{OH}\perp l$$



문제 **1** 삼수선의 정리 (3)을 증명하여라.

예제 **02** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{AE}=2$인 직육면체에서 점 C에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 K라고 할 때, 선분 CK의 길이를 구하여라.



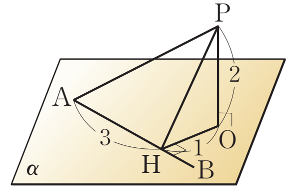
풀이 $\overline{CG}\perp$(평면 EFGH), $\overline{CK}\perp\overline{HF}$이므로 삼수선의 정리 (2)에 의하여 $\overline{GK}\perp\overline{HF}$

$\triangle HFG=\frac{1}{2}\overline{HG}\times\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{HF}\times\overline{GK}=6$에서 $\overline{HF}=5$이므로 $\overline{GK}=\frac{12}{5}$

따라서 직각삼각형 CGK에서 $\overline{CK}=\sqrt{\overline{CG}^2+\overline{GK}^2}=\frac{2\sqrt{61}}{5}$

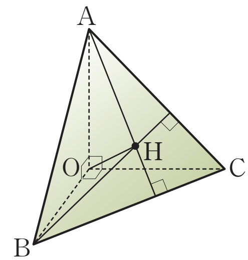
답 $\frac{2\sqrt{61}}{5}$

문제 2 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{OP}=2$, $\overline{OH}=1$, $\overline{AH}=3$일 때, 선분 AP의 길이를 구하여라.



발전

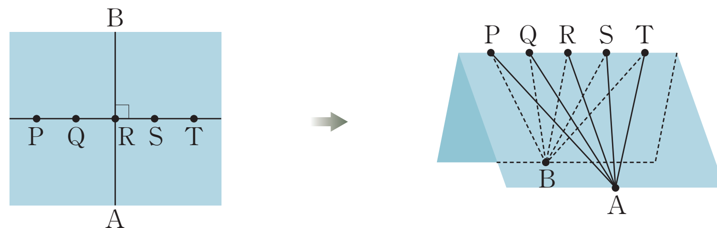
문제 3 오른쪽 그림과 같은 사면체에서 서로 수직으로 만나는 세 모서리 OA, OB, OC에 대하여 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선과 점 B에서 모서리 AC에 내린 수선의 교점을 H라고 할 때, 선분 OH는 면 ABC와 수직임을 증명하여라.



두 평면이 이루는 각은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

다음 그림과 같이 직사각형 모양의 종이에 점을 표시한 후 반으로 접고, 적당한 각으로 펼쳐 세웠다. 물음에 답하여 보자.

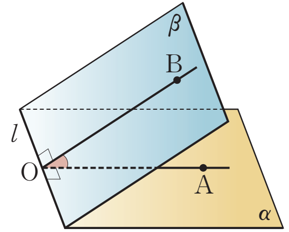


1. 각 APB, 각 AQB, 각 ARB, 각 ASB, 각 ATB 중에서 크기가 가장 큰 각을 찾아보자.
2. 종이를 접고 나서 적당한 각으로 펼쳐 세웠을 때 생기는 두 면이 이루는 각으로 적당한 것은 어느 것인지 토의하여 보자.

공간에서 두 평면이 이루는 각에 대하여 알아보자.

평면 위의 한 직선은 그 평면을 각각 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 반평면이라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 만날 때, 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어지는 도형을 **이면각**이라 하고, 이때 직선 l을 **이면각의 변**, 두 반평면 α, β를 각각 **이면각의 면**이라고 한다.



이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기를 **이면각의 크기**라고 한다.

두 평면이 만나면 네 개의 이면각이 생기는데, 이 중 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라고 한다.

두 평면이 이루는 각은 보통 크기가 작은 쪽의 각을 생각한다.

특히 두 평면 α, β가 이루는 각이 직각일 때, 두 평면 α, β는 수직이라 하고, 기호로

$$\alpha \perp \beta$$

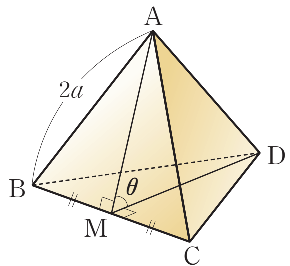
와 같이 나타낸다.

예제 03 정사면체에서 두 면이 이루는 이면각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같은 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라고 하자. 모서리 BC의 중점을 M이라고 하면

$$\overline{AM} \perp \overline{BC},\ \overline{DM} \perp \overline{BC}$$

이므로 $\angle AMD = \theta$이다.



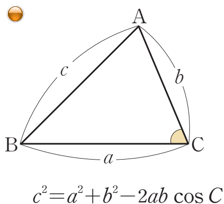
또 삼각형 AMD에서

$$\overline{AM} = \sqrt{3}a,\ \overline{DM} = \sqrt{3}a,\ \overline{DA} = 2a$$

이므로

$$\cos\theta = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 - \overline{DA}^2}{2 \times \overline{AM} \times \overline{DM}}$$

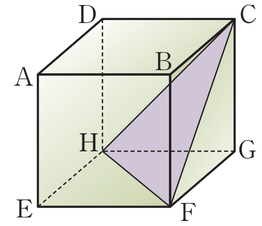
$$= \frac{(\sqrt{3}a)^2 + (\sqrt{3}a)^2 - (2a)^2}{2 \times \sqrt{3}a \times \sqrt{3}a} = \frac{1}{3}$$



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

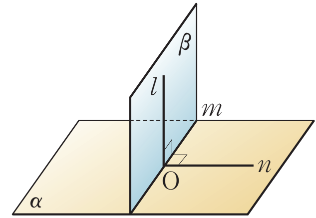
답 $\frac{1}{3}$

문제 4 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



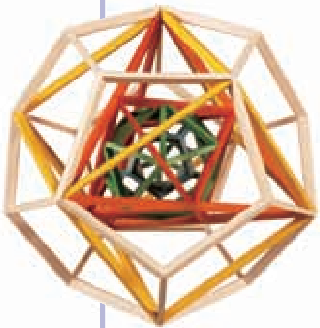
예제 04 평면 α에 수직인 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α와 수직임을 증명하여라.

증명 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 m이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라고 하자.
평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m에 수직인 직선 n을 그으면 $l \perp m$
그런데 $l \perp \alpha$이므로 $l \perp n$
즉, 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 평면이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\alpha \perp \beta$이다.



문제 5 평면 α에 수직인 평면 β 위의 한 점 A에서 α, β의 교선에 내린 수선의 발을 O라고 하면 $\overline{\mathrm{AO}} \perp \alpha$임을 증명하여라.

단원 과제



앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 종류가 존재한다. 이들 정다면체의 이면각을 나타내면 다음과 같다.

정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체

정사면체와 정팔면체의 이면각의 크기의 합을 구하여라.

03 정사영

● 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

정사영이란 무엇인가?

생각 열기

태양열 발전



태양열 발전이란 태양 에너지를 모아서 열로 변환하고 열기관을 통해 그 열을 전력으로 변환하는 발전 방식이다.

태양열 발전 장치 중 태양으로부터 오는 에너지를 모아서 열로 변환하는 집열판은 태양열 발전에서 가장 중요한 장치로, 보통 투명한 유리로 구성되는데 유리 이외에 투명 플라스틱이나 섬유 유리 등이 이용되기도 한다.

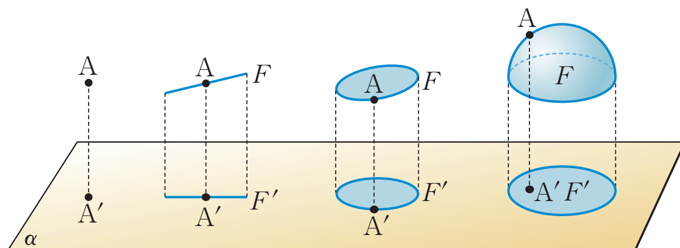
탐구 활동

직사각형 모양의 태양열 집열판이 지면과 일정한 각을 이루며 설치되어 있다. 햇빛이 지면에 수직으로 비칠 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 집열판과 지면이 이루는 각이 커질수록 집열판의 그림자의 넓이는 어떻게 변하는지 말하여 보자.
2. 집열판의 넓이와 집열판의 그림자의 넓이가 같을 때, 집열판과 지면이 이루는 각의 크기는 얼마인지 구하여 보자.

평면 α 위에 있지 않은 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발 A'을 점 A의 평면 α 위로의 **정사영**이라고 한다.

일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.



직선과 평면이 수직이면 직선의 평면 위로의 정사영은 한 점이고, 수직이 아니면 직선이다.

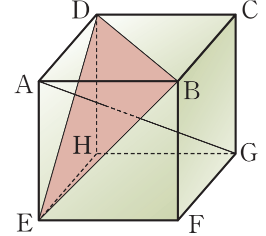
일반적으로 직선의 평면 위로의 정사영은 직선 또는 한 점이고, 다각형의 평면 위로의 정사영은 다각형 또는 선분이다.

문제 1 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음을 구하여라.

(1) 대각선 AG의 평면 EFGH 위로의 정사영

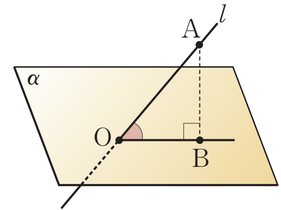
(2) 선분 BD의 평면 AEFB 위로의 정사영

(3) 삼각형 BDE의 평면 EFGH 위로의 정사영



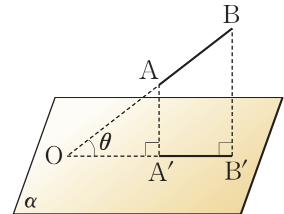
직선과 평면이 이루는 각은 크기가 작은 쪽의 각을 생각한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 l과 평면 α가 수직이 아니고 직선 l 위의 한 점 A의 평면 α 위로의 정사영을 점 B라고 할 때, 직선 l과 평면 α의 교점 O에 대하여 $\angle$AOB를 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라고 한다. 특히 $l /\!/ \alpha$일 때, 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 0°이다.



이제 선분의 길이와 그 선분의 정사영의 길이 사이의 관계에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 평면 α에 수직이 아닌 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α의 교점을 O라고 하자. 이때 $\angle AOA'=\theta$라고 하면



$$\overline{OA'}=\overline{OA}\cos\theta,\ \overline{OB'}=\overline{OB}\cos\theta$$

이므로

$$\overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}=(\overline{OB}-\overline{OA})\cos\theta=\overline{AB}\cos\theta$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$$

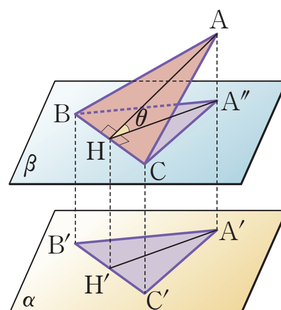
보기 길이가 4인 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라고 할 때, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이면 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$

문제 2 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $\overline{AB}=6$, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, 선분 A′B′의 길이

(2) $\overline{AB}=10$, $\overline{A'B'}=5\sqrt{2}$일 때, θ의 크기

도형의 넓이와 그 도형의 정사영의 넓이 사이의 관계에 대하여 알아보자.



오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 한 변 BC와 평면 α가 평행할 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영을 삼각형 A′B′C′이라 하고, 평면 α와 삼각형 ABC를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

이때 변 BC를 포함하고 평면 α에 평행한 평면을 β라 하고, 평면 β와 직선 AA′의 교점을 A″이라고 하면

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''BC$$

이다. 또 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼수선의 정리 (2)에 의하여

● $\overline{AA''}\perp\beta$, $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 이므로 $\overline{A''H}\perp\overline{BC}$

$$\overline{A''H}\perp\overline{BC}$$

이다. 따라서 $\angle AHA''=\theta$이므로

$$\triangle A'B'C'=\triangle A''BC=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{A''H}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AH}\cos\theta=\triangle ABC\cos\theta$$

가 성립한다.

일반적으로 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

정사영의 넓이

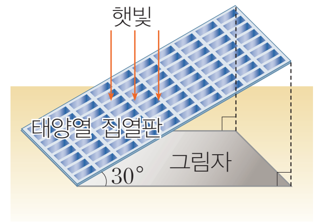
도형 F의 평면 α 위로의 정사영을 F'이라 하고, 도형 F를 포함하는 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기를 θ, 도형 F와 도형 F'의 넓이를 각각 S, S'이라고 하면

$$S'=S\cos\theta$$

보기 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고, 평면 β 위에 있는 넓이가 10인 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 하면 $S'=10\cos\frac{\pi}{3}=10\times\frac{1}{2}=5$

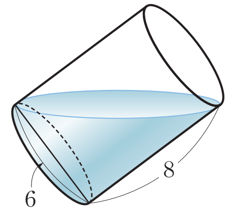
실생활

문제 3 오른쪽 그림과 같이 지면과 30°의 각도로 설치된 직사각형 모양의 태양열 집열판이 있다. 햇빛이 지면에 수직으로 비칠 때, 태양열 집열판의 그림자의 넓이가 $150\ \mathrm{m}^2$이다. 이때 태양열 집열판의 넓이를 구하여라.

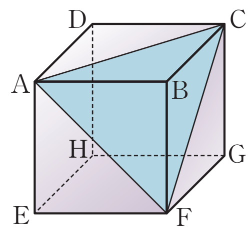


발전

문제 4 밑면의 지름의 길이가 6, 높이가 8인 원기둥 모양의 컵에 물을 가득 채운 후 오른쪽 그림과 같이 기울여서 물의 양이 처음의 $\frac{1}{2}$만 남도록 하였다. 이때 타원 모양의 수면의 넓이를 구하여라.



예제 01 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 삼각형 AFC와 밑면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



● 한 변의 길이가 x인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$이다.

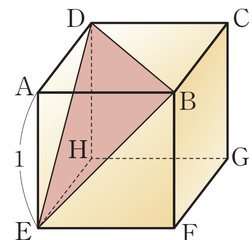
풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면 $\triangle\mathrm{AFC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFG이고 $\triangle\mathrm{EFG}=\frac{1}{2}a^2$

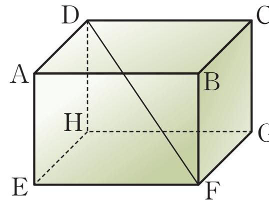
따라서 $\frac{1}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

문제 5 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체가 있다. 삼각형 FHE의 평면 BDE로의 정사영의 넓이를 구하여라.



1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 대각선 DF와 서로 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 구하여라.

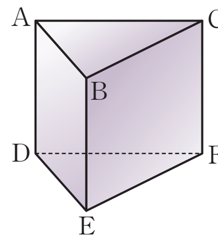


01 직선, 평면의 위치 관계
두 직선의 위치 관계

2 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 다음을 구하여라.

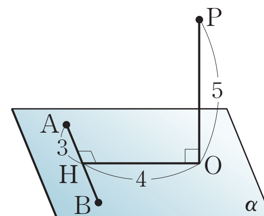
(1) 면 ABC와 만나는 면

(2) 면 ABC와 평행한 면



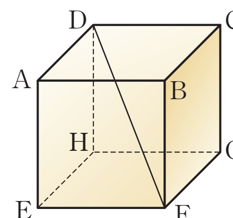
01 직선, 평면의 위치 관계
두 평면의 위치 관계

3 평면 α 위의 선분 AB와 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 한다. $\overline{PO}=5$, $\overline{OH}=4$, $\overline{AH}=3$일 때, $\overline{PA}$의 길이를 구하여라.



02 삼수선의 정리

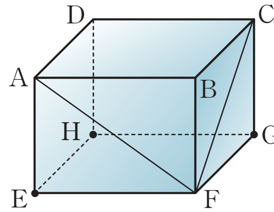
4 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 대각선 DF와 평면 AEFB가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



03 정사영

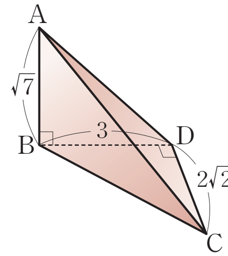
중단원 기본

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 세 점 E, G, H와 두 직선 AF, CF로 결정되는 서로 다른 평면의 개수를 구하여라.



01 직선, 평면의 위치 관계
평면의 결정조건

2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}\perp$(면 BCD), $\overline{BD}\perp\overline{CD}$인 사면체에서 $\overline{AB}=\sqrt{7}$, $\overline{BD}=3$, $\overline{CD}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ACD의 넓이를 구하여라.

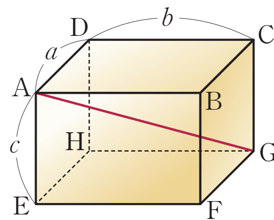


02 삼수선의 정리

3 사면체 ABCD에서 모서리 BC의 길이는 4, 삼각형 ABC의 넓이는 14, 삼각형 BCD의 넓이는 12이다. 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, 사면체 ABCD의 부피를 구하여라.

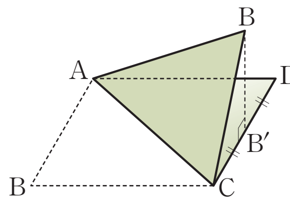
02 삼수선의 정리
이면각

4 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=a$, $\overline{CD}=b$, $\overline{AE}=c$인 직육면체에서 대각선 AG가 평면 ABCD, AEHD, DHGC와 이루는 각의 크기를 각각 α, β, γ라고 할 때, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$의 값을 구하여라.



03 정사영

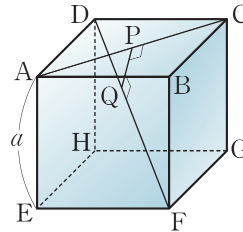
5 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD를 대각선 AC를 접는 선으로 하여 적당히 접었더니 꼭짓점 B의 평면 ACD 위로의 정사영 B′이 변 CD의 중점이 되었다. 평면 ACB와 평면 ACD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



03 정사영

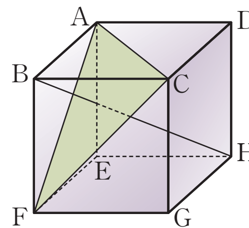
중단원 실력

1 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정육면체에서 선분 AC 위의 점 P와 선분 DF 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ가 두 선분 AC, DF와 각각 수직일 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.



01 직선, 평면의 위치 관계
두 직선이 이루는 각

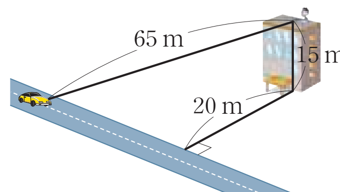
2 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 대각선 BH는 평면 AFC와 수직임을 증명하여라.



01 직선, 평면의 위치 관계
직선과 평면의 수직

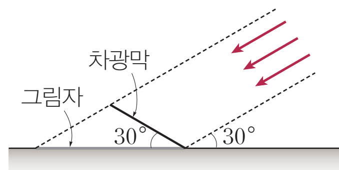
3 오른쪽 그림과 같이 높이가 15 m인 건물과 직선 도로의 최단 거리가 20 m인 직선 도로가 있다. 이 건물의 옥상에서 최대 송신 거리가 65 m인 리모컨으로 도로 위를 움직이는 모형 자동차를 조종할 때, 리모컨으로 모형 자동차를 조종할 수 있는 도로의 총 길이를 구하여라.

(단, 직선 도로의 폭은 무시한다.)



02 삼수선의 정리

4 오른쪽 그림과 같이 햇빛이 운동장에 세워 놓은 차광막을 비추고 있다. 차광막과 지면이 이루는 각의 크기가 30°이고 그림자의 넓이가 12일 때, 차광막의 넓이를 구하여라.



03 정사영

2 공간좌표

인공위성

인공위성은 지구와 같은 행성의 둘레를 돌 수 있도록 로켓을 이용해 쏘아 올린 인공 장치로 사용하는 목적에 따라 상대편의 정보를 몰래 볼 수 있는 첩보 위성, 날씨를 알려주는 기상 위성, 다른 나라의 방송을 볼 수 있게 하는 통신 위성, 위치를 알려주는 항행 위성(GPS 위성), 우주를 관측하기 위한 천문 위성 등으로 분류된다.

인공위성이 움직이는 일정한 경로를 위성 궤도라고 하는데 위성 궤도에는 원형 궤도와 타원형 궤도가 있으며 보통 타원형 궤도를 따른다. 궤도 높이에 따라서 분류하기도 하는데 그 높이가 해발 250 km 정도의 대기 바로 위를 도는 궤도부터 해발 32200 km 이상인 궤도까지 있다. 궤도가 크면 클수록 위성이 궤도를 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간, 즉 궤도 주기가 길어진다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 160쪽

지구 중심의 좌표를 구할 수 있을까?

01

공간에서의 점의 좌표

- 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다.
- 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

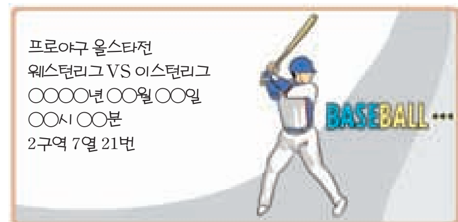
공간에서 점의 위치를 어떻게 나타내는가?

생각 열기



탐구 활동

오른쪽 그림은 어느 야구장의 입장권이다. 이 야구장의 2구역 7열 21번의 좌석을 (2, 7, 21)로 나타내었다. 다음 물음에 답하여 보자.



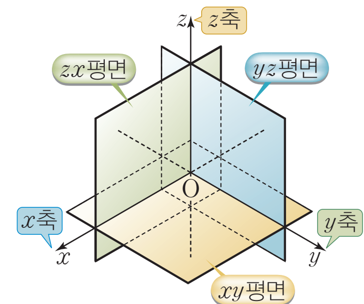
1. 3구역 5열 17번의 좌석을 위의 방법으로 나타내어 보자.

2. (1, 6, 47)로 나타낸 것은 어떤 좌석을 나타내는가?

직선 위의 점의 위치는 하나의 실수로 나타낼 수 있고, 평면 위의 점의 위치는 두 실수의 순서쌍인 평면좌표로 나타낼 수 있다.

이제 공간 위의 점의 위치를 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그었을 때, 점 O를 원점, 각각의 수직선을 x축, y축, z축이라 하고, 이들을 통틀어 좌표축이라고 한다. 또

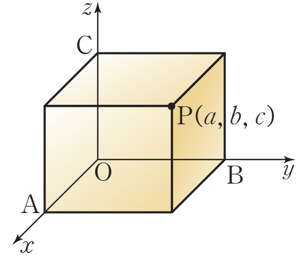


x축과 y축으로 결정되는 평면을 xy평면,
y축과 z축으로 결정되는 평면을 yz평면,
z축과 x축으로 결정되는 평면을 zx평면

이라 하고, 이들을 통틀어 좌표평면이라고 한다.

이와 같이 좌표축과 좌표평면이 정해진 공간을 **좌표공간**이라고 한다.

공간에 있는 임의의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나고 yz평면, zx평면, xy평면에 각각 평행한 평면이 x축, y축, z축과 만나는 점을 차례로 A, B, C라고 하자.



이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라고 하면 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 정해진다.

역으로 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 주어지면 공간의 한 점 P가 정해진다.

따라서 공간의 한 점 P와 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)는 일대일 대응이 된다.

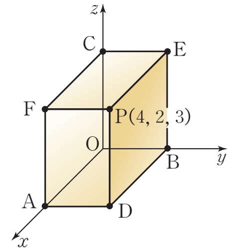
이 실수의 순서쌍 (a, b, c)를 점 P의 **공간좌표** 또는 좌표라 하고, a, b, c를 차례로 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라고 한다.

점 P의 좌표가 (a, b, c)일 때, 이것을 기호로

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

와 같이 나타낸다.

보기 오른쪽 그림의 직육면체에서 점 P의 좌표가 $(4, 2, 3)$일 때, 점 P에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 고 하면 A$(4, 0, 0)$, B$(0, 2, 0)$, C$(0, 0, 3)$
또 점 P에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하면 D$(4, 2, 0)$, E$(0, 2, 3)$, F$(4, 0, 3)$



문제 1 점 P$(2, 5, 4)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발

(2) 점 P에서 zx평면에 내린 수선의 발

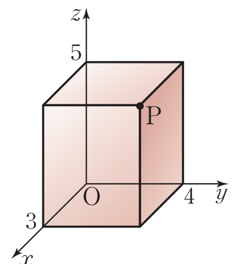


문제 2 점 P$(3, 4, 5)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 점 P의 zx평면에 대하여 대칭인 점

(2) 점 P의 y축에 대하여 대칭인 점

(3) 점 P의 원점에 대하여 대칭인 점



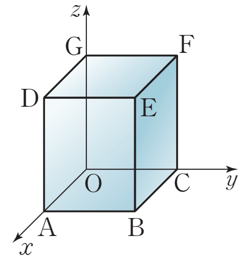
좌표공간에서 두 점 사이의 거리는 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 점 E의 좌표가 (3, 4, 5)일 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. $\overline{\mathrm{OB}}$의 길이를 구하여 보자.

2. **1**의 결과를 이용하여 $\overline{\mathrm{OE}}$의 길이를 구하여 보자.



좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 대각선으로 하고 각 면이 좌표평면과 평행한 직육면체를 생각하면 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2=(\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2)+\overline{\mathrm{BD}}^2$$

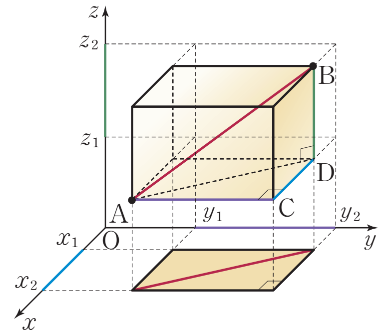
이다. 이때

$$\overline{\mathrm{CD}}=|x_2-x_1|,\ \overline{\mathrm{AC}}=|y_2-y_1|,\ \overline{\mathrm{BD}}=|z_2-z_1|$$

이므로 좌표공간의 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

이다.



수학 I 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{AB}}=|x_2-x_1|$
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1^2)}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ **사이의 거리는**

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

특히 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ **사이의 거리는**

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

보기 두 점 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(-2, 1, 1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{14}$$

원점 O와 점 $\mathrm{P}(1, 2, 2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$$

문제 3 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1) $A(4,\ 4,\ -2)$, $B(3,\ 4,\ 0)$ (2) $A(2,\ 1,\ 4)$, $B(-4,\ -2,\ 2)$

(3) $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(2,\ -4,\ 4)$ (4) $A(a,\ -2b,\ -2a)$, $B(-b,\ 2a,\ 2b)$

예제 01

두 점 $A(3,\ 1,\ -2)$, $B(1,\ 0,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ 0,\ 0)$이라고 하면

$$\overline{AP}=\sqrt{(x-3)^2+(0-1)^2+\{0-(-2)\}^2}=\sqrt{x^2-6x+14}$$

$$\overline{BP}=\sqrt{(x-1)^2+(0-0)^2+(0-5)^2}=\sqrt{x^2-2x+26}$$

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$$x^2-6x+14=x^2-2x+26$$

따라서 $x=-3$이므로 구하는 점 P의 좌표는 $(-3,\ 0,\ 0)$이다.

답 $P(-3,\ 0,\ 0)$

문제 4 다음 점의 좌표를 구하여라.

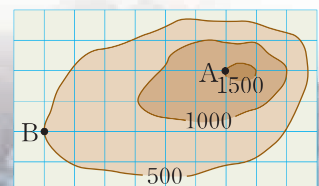
(1) 두 점 $A(1,\ 1,\ -2)$, $B(2,\ 4,\ 0)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P

(2) 세 점 $A(1,\ 1,\ -2)$, $B(2,\ 4,\ 0)$, $C(1,\ 0,\ 1)$에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 Q

문제 5 두 점 $A(2,\ 2,\ 4)$, $B(-2,\ 4,\ 6)$과 yz평면 위의 점 C를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 C의 좌표를 모두 구하여라.

실생활

문제 6 오른쪽 그림과 같이 지도에 표시된 두 지점 A, B 사이의 실제 직선 거리를 구하여라. (단, 눈금은 같은 간격으로 그려져 있으며 눈금 한 칸의 실제 거리는 500 m이다.)



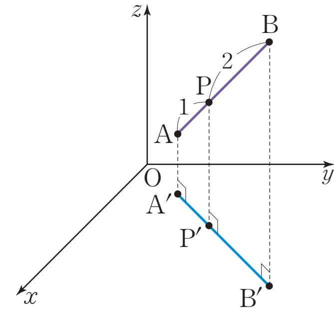
02 선분의 내분점과 외분점

● 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

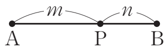
두 점 A(1, 1, 1), B(4, 4, 4)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P라 하고 세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 점 A′, B′, P′이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 두 점 A′, B′의 좌표를 각각 구하여 보자.

2. $\overline{\text{A}'\text{P}'} : \overline{\text{P}'\text{B}'}$을 구하여 보자.

● 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P의 위치



좌표평면 위의 두 점 $\text{A}(x_1, y_1)$, $\text{B}(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

이다.

이제 좌표공간의 두 점 $\text{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\text{B}(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 (x, y, z)를 구하여 보자.

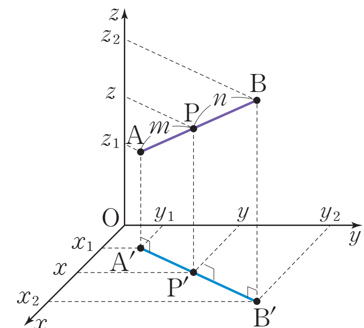
세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라고 하면

$\text{A}'(x_1, y_1, 0)$, $\text{B}'(x_2, y_2, 0)$, $\text{P}'(x, y, 0)$

이다. 또

$$\overline{\text{AP}} : \overline{\text{PB}} = \overline{\text{A}'\text{P}'} : \overline{\text{P}'\text{B}'} = m : n$$

이므로 점 P′은 선분 A′B′을 $m : n$으로 내분하는 점이다.



이때 세 점 A′, B′, P′은 xy평면 위에 있으므로

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

이다.

마찬가지로 세 점 A, B, P의 yz평면 또는 zx평면 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 z좌표를 구하면

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

이다. 따라서 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

이다.

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $m=n$일 때이므로

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

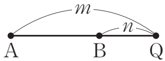
이다.

이와 같은 방법으로 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하면 다음과 같다.

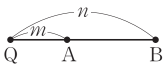
$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 위치

① $m>n$일 때



② $m<n$일 때



이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

두 점 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

보기 두 점 A$(1,\ 3,\ -3)$, B$(-2,\ 6,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P와 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1},\ \frac{2\times6+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2\times(-2)-1\times1}{2-1},\ \frac{2\times6-1\times3}{2-1},\ \frac{2\times3-1\times(-3)}{2-1}\right)$$

이므로 P$(-1,\ 5,\ 1)$, Q$(-5,\ 9,\ 9)$

문제 1 두 점 A$(1,\ 2,\ 3)$, B$(4,\ 5,\ 6)$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표

(3) 선분 PQ의 중점 M의 좌표

발전

문제 2 평행사변형 ABCD에서 A$(3,\ 4,\ 1)$, B$(2,\ 5,\ -1)$이고 두 대각선의 교점의 좌표가 $(2,\ 3,\ 0)$일 때, 선분 BC의 길이를 구하여라.

예제 01

삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$, C$(x_3,\ y_3,\ z_3)$일 때, 무게중심 G의 좌표는

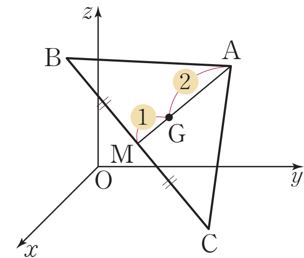
$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

임을 증명하여라.

삼각형의 무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분한다.

증명 변 BC의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2},\ \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$



삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하면 점 G는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+1\times x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+1\times y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$z=\frac{2\times\frac{z_2+z_3}{2}+1\times z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

문제 3 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 A$(2,\ -10,\ 4)$, B$(0,\ 4,\ -6)$이고 무게중심의 좌표가 G$(2,\ -4,\ 0)$일 때, 점 C의 좌표를 구하여라.

03 구의 방정식

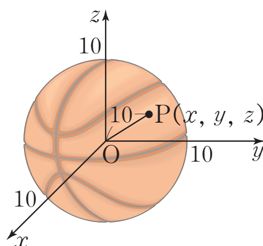
● 구의 방정식을 구할 수 있다.

좌표공간에서 구의 방정식은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 좌표공간에 반지름의 길이가 10인 구 모양의 공을 중심이 원점 O와 일치하도록 놓고, 공 위의 임의의 점을 $P(x,\ y,\ z)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 이 공을 xy평면으로 자르면 단면은 어떤 도형이 되는가?
2. 선분 OP의 길이를 x, y, z로 나타내어 보자.



공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합을 구라고 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라고 한다.

좌표공간에서 중심이 점 $C(a,\ b,\ c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식을 구하여 보자.

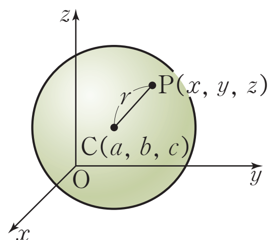
구 위의 임의의 점을 $P(x,\ y,\ z)$라고 하면 $\overline{CP}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.



역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 $P(x,\ y,\ z)$는

$\overline{CP}=r$이므로 점 P는 중심이 점 $C(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 구하는 구의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

구의 방정식

중심이 $C(a,\ b,\ c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

보기 중심이 C$(3,\ 2,\ -4)$이고, 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$$

중심이 원점이고, 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=16$$

문제 1 다음 구의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 C$(1,\ -2,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 2인 구

(2) 중심이 C$(1,\ 2,\ 3)$이고, 원점을 지나는 구

(3) 두 점 A$(2,\ 3,\ 5)$, B$(6,\ 5,\ 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구

(4) 중심이 C$(5,\ 1,\ 2)$이고, xy평면에 접하는 구

구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

이다. 여기서 $-2a=A$, $-2b=B$, $-2c=C$, $a^2+b^2+c^2-r^2=D$로 놓으면

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

의 꼴이 된다.

역으로 x, y, z에 대한 이차방정식 ①을 완전제곱의 꼴로 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

이므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 방정식 ①은 중심이 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

$A^2+B^2+C^2-4D=0$이면 방정식 ①은 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$를 나타낸다. 또 $A^2+B^2+C^2-4D<0$이면 방정식 ①을 만족시키는 실수 x, y, z는 존재하지 않는다.

예제 01 방정식 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+5=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

풀이 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+5=0$을 변형하면 $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3^2$

따라서 주어진 방정식은 중심이 $(-3,\ 1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 3인 구를 나타낸다.

답 중심이 $(-3,\ 1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 3인 구

문제 2 방정식 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

예제 02 네 점 O(0, 0, 0), P(1, 0, −1), Q(−1, 2, 1), R(1, 3, 0)을 지나는 구의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라고 하면
네 점 O, P, Q, R가 이 구를 지나므로 각 점의 좌표를 대입하여 정리하면

$$A=2,\ B=-4,\ C=4,\ D=0$$

따라서 구하는 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z=0$

답 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z=0$

문제 3 네 점 O(0, 0, 0), P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0), R(0, 0, 3)을 지나는 구의 방정식을 구하여라.

발전 **문제 4** 구 $x^2+y^2+z^2-2ax+2y-4z+5=0$이 xy평면에 접할 때, 양수 a의 값을 구하여라.

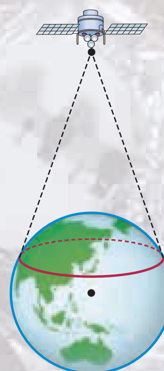
창의 up

두 점 A(−1, 0, 0), B(3, 0, 0)에서 거리의 제곱의 합이 10으로 일정한 점 P(x, y, z)가 그리는 도형이 무엇인지 말하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

지구가 반지름의 길이가 6400 km인 완전한 구의 모양이고, 인공위성에서 지표면에 보내는 전파가 직선으로 전송된다고 할 때, 이 인공위성에서 전파가 도달하는 최대 지점들로 이루어진 도형은 원이다. 이 원은 지구가 xy평면과 만나서 생기는 원과 같고, 원의 둘레의 길이가 $6400\sqrt{3}\pi$, 원의 중심의 좌표가 (1280, 1400, 0)일 때, 지구의 중심의 좌표를 구하여라. (단, 지구의 중심의 z좌표는 음수이다.)

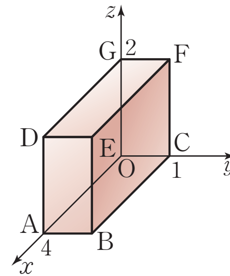


중단원 기초

[해답 p.217]

수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 각 꼭짓점의 좌표를 구하여라.



01 공간에서의 점의 좌표

2 두 점 A(1, 1, 3), B(2, 3, 4)에서 같은 거리에 있는 z축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

01 공간에서의 점의 좌표
두 점 사이의 거리

3 두 점 P(−1, −2, 6), Q(2, 2, 6)이 점 R$(a,\ b,\ c)$에 대하여 대칭일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

02 선분의 내분점과 외분점
선분의 중점

4 세 점 A(2, 3, 1), B(−2, 3, 1), C(5, 0, 2)에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AC를 3 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표

(3) 선분 PQ의 중점 M의 좌표

02 선분의 내분점과 외분점

5 다음 방정식이 나타내는 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하여라.

(1) $x^2+y^2+z^2-2y+4z-4=0$

(2) $x^2+y^2+z^2+6x-4y+9=0$

03 구의 방정식

중단원 기본

1 두 점 $A(-2,\ 3,\ 0)$, $B(3,\ 0,\ 0)$에 대하여 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$을 만족시키면서 움직이는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하여라.

01 공간에서의 점의 좌표
두 점 사이의 거리

2 점 $A(2,\ 3,\ 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라고 할 때, 선분 PQ를 $2:1$로 외분하는 점 R의 좌표를 구하여라.

02 선분의 내분점과 외분점

3 네 점 $A(3,\ 2,\ 1)$, $B(4,\ 6,\ 10)$, $C(a,\ 3,\ 5)$, $D(7,\ b,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 사면체 ABCD가 정사면체라고 할 때, 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표를 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)

02 선분의 내분점과 외분점
삼각형의 무게중심

4 점 $A(2,\ 2,\ 4)$를 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 구는 2개이다. 이때 두 구의 반지름의 길이의 합을 구하여라.

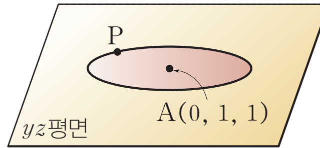
03 구의 방정식

5 점 $(-2,\ 3,\ 7)$에서 구 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-4=0$에 그은 접선의 길이를 구하여라.

03 구의 방정식

중단원 실력

1 중심이 점 A(0, 1, 1)이고, 반지름의 길이가 1인 원이 yz평면 위에 있다. 이 원 위의 점 P와 점 Q(2, 4, −3) 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.



01 공간에서의 점의 좌표
두 점 사이의 거리

2 좌표공간 위에 세 점 A(6, 2, 10), B(4, 2, 6), C(8, 8, 6)이 있다. zx평면 위의 점 P, xy평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$의 최솟값을 구하여라.

01 공간에서의 점의 좌표
두 점 사이의 거리

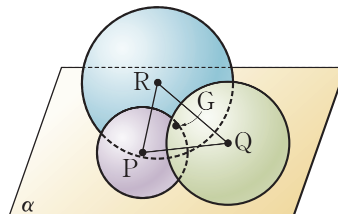
3 두 점 A(−2, 5, −4), B(a, b, c)에 대하여 선분 AB가 xy평면에 의하여 1 : 2로 내분되고, z축에 의하여 3 : 2로 외분된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

02 선분의 내분점과 외분점

4 구 $x^2+y^2+z^2-2ax+2y-2bz+5=0$이 xy평면과 yz 평면에 동시에 접하도록 두 양수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

03 구의 방정식

5 반지름의 길이가 각각 6, 8, 10이고 서로 외접하는 세 구가 평면 α 위에 놓여 있다. 세 구의 중심을 각각 P, Q, R라고 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심 G와 평면 α 사이의 거리를 구하여라.

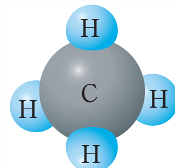


03 구의 방정식

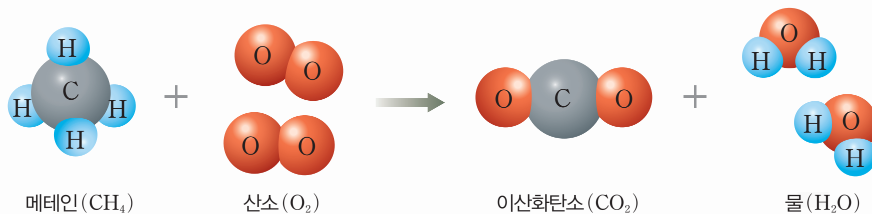
3

공간벡터

메테인 분자와 벡터의 내적



메테인(methane)은 지방족 탄화수소 화합물 중 가장 간단한 알케인 화합물로 무색무취의 가연성 기체이며 도시가스(액화 천연가스, LNG)의 주성분이다. 분자식이 CH_4인 메테인 분자의 구조는 탄소 원자(C)가 정사면체의 중심에 있고 각 꼭짓점에 4개의 수소 원자(H)가 각각 1개씩 있는 구조이다. 메테인은 연소 반응과 치환 반응을 통해 수소 원자를 다른 작용기로 치환시켜 다양한 화합물을 만드는데, 메테인 분자는 산소 분자(O_2)와 연소 반응 후 이산화탄소와 물을 생성한다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

177쪽

메테인 분자 구조를 좌표공간에 나타내었을 때, 벡터의 내적을 이용하여 탄소와 수소 원자의 좌표를 구할 수 있을까?

01

공간벡터의 뜻과 그 연산

● 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

공간벡터란 무엇인가?

생각 열기

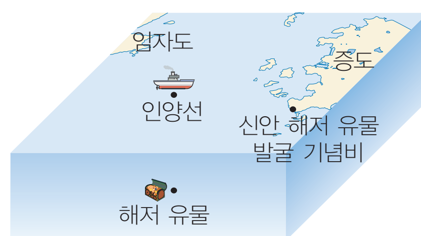
신안 해저 유물

신안 해저 유물은 1976년 전라남도 신안군 증도면 앞바다에서 발굴 인양된 중국 송, 원 시대 유물을 말한다. 발굴 지역의 위치는 동경 126도 5분 6초, 북위 35도 1분 15초로 임자도와 증도의 중간 지점이다. 발굴 당시 해저면 아래에서 길이 약 20 m, 너비 6.9 m 정도의 목선이 매몰된 상태로 발견되었다.


청백자주전자

탐구 활동

신안 해저 유물은 신안 해저 유물 발굴 기념비에서 서북 방향으로 약 2500 m 떨어진 바다의 해수면 아래 약 20 m 지점에서 발굴되었다고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 기념비에서 인양선까지를 벡터로 나타내어 보자.
2. 인양선에서 해저 유물까지를 벡터로 나타내어 보자.
3. 기념비에서 해저 유물까지를 벡터로 나타내어 보자.

평면에서의 벡터와 마찬가지로 공간에서 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **공간벡터**라고 한다.

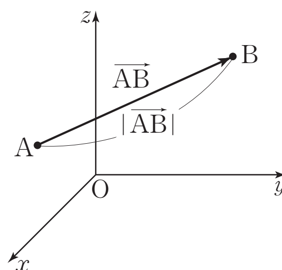
오른쪽 그림과 같이 공간에서 한 점 A를 시점으로 하고 한 점 B를 종점으로 하는 벡터를 평면벡터와 마찬가지로

$$\overrightarrow{AB} \text{ 또는 } \vec{a}$$

와 같이 나타낸다. 이때 선분 AB의 길이를 이 벡터의 크기라 하고, 기호로

$$|\overrightarrow{AB}| \text{ 또는 } |\vec{a}|$$

와 같이 나타낸다.



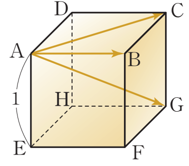
또한 크기가 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.

한편 벡터 $\overrightarrow{AA}$를 영벡터라 하고, 기호로 $\vec{0}$와 같이 나타낸다.

보기 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서

$$|\overrightarrow{AB}|=1,\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{AG}|=\sqrt{3}$$

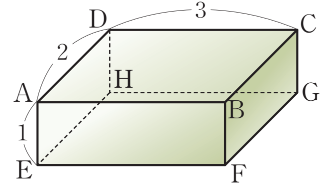
이고 $\overrightarrow{AB}$는 단위벡터이다.



문제 1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=3$, $\overline{AE}=1$인 직육면체에서 다음 벡터의 크기를 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{FC}$

(3) $\overrightarrow{EB}$　　(4) $\overrightarrow{AG}$

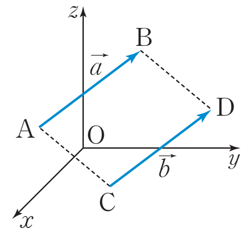


오른쪽 그림과 같이 공간에서 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$의 크기와 방향이 같을 때 두 벡터는 서로 같다고 하며, 기호로 $\vec{a}=\vec{b}$ 또는 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$와 같이 나타낸다.

한편 벡터 $\vec{a}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 기호로 $-\vec{a}$와 같이 나타낸다. 즉, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$라고 하면 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이다.

벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향만으로 결정되므로 한 벡터를 평행이동한 것은 모두 같은 벡터이다.

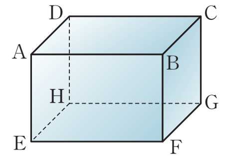
$|-\vec{a}|=|\vec{a}|$
$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|$



보기 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$　　(2) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$

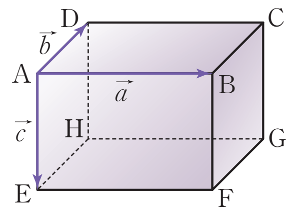
(3) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{HF}$　　(4) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{CF}$



문제 2 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.

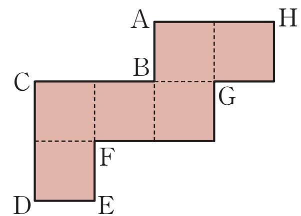
(1) $\overrightarrow{HG}$　　(2) $\overrightarrow{EH}$

(3) $\overrightarrow{CG}$　　(4) $\overrightarrow{CB}$



창의 up

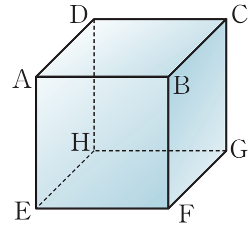
오른쪽 그림은 정육면체의 전개도이다. 이 전개도를 접어서 만들 수 있는 정육면체를 그리고, 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터를 모두 찾아보아라.



공간벡터의 연산은 어떻게 하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 정육면체에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



1. 면 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$와 같은 벡터를 찾아보자.

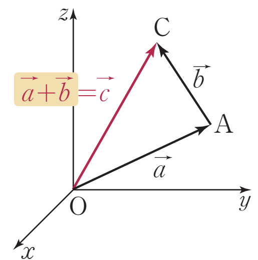
2. 벡터 $\overrightarrow{CG}$를 나타내어 보자.

3. 면 AEGC에서 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$와 같은 벡터를 찾아보자.

공간에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$가 되도록 세 점 O, A, C를 잡을 때, $\overrightarrow{OC}$로 나타내어지는 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고, 기호로

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \text{ 또는 } \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

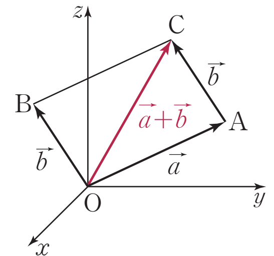
와 같이 나타낸다.



또한 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$이므로

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

이다.



평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터의 덧셈에 대하여 다음과 같은 연산법칙이 성립한다.

공간벡터의 덧셈에 대한 연산법칙

세 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

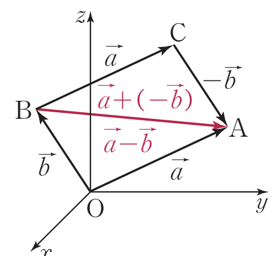
(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

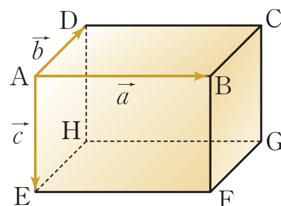
평면에서와 마찬가지로 공간에서 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 차는 $\vec{a}-\vec{b}$로 나타내며 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $-\vec{b}$의 합과 같다. 즉,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

이다.



문제 3 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



(1) $\overrightarrow{AH}$　　　　(2) $\overrightarrow{AG}$

(3) $\overrightarrow{FC}$　　　　(4) $\overrightarrow{DF}$

공간에서 임의의 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$, 즉 벡터 $\vec{a}$의 실수배는 평면에서와 마찬가지이다.

즉, 임의의 실수 k와 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$의 실수배 $k\vec{a}$는 $k>0$이면 방향은 $\vec{a}$와 같고 크기는 $k|\vec{a}|$인 벡터이고, $k<0$이면 방향은 $\vec{a}$와 반대이고 크기는 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

● $|k||\vec{a}|=|k\vec{a}|$

한편 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $k=0$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터에서도 다음이 성립한다.

공간벡터의 실수배에 대한 성질

실수 k, l과 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

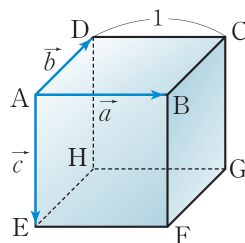
(1) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$　　(결합법칙)

(2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$　　(분배법칙)

(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$　　(분배법칙)

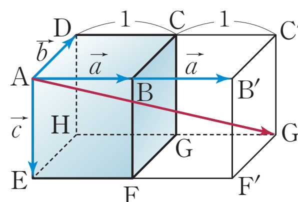
예제 01

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, $|2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$의 값을 구하여라.



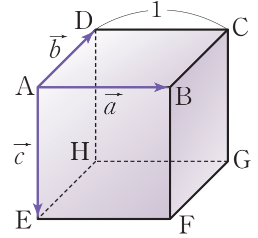
풀이 오른쪽 그림과 같이 $2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$는 가로의 길이가 2이고, 세로의 길이와 높이가 각각 1인 직육면체 AB′C′D−EF′G′H에서 $\overrightarrow{AG'}$이므로

$$|\overrightarrow{AG'}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$



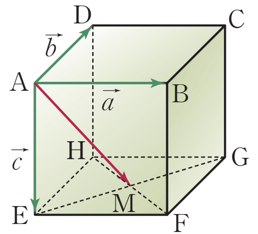
답 $\sqrt{6}$

문제 4 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, $|\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}|$의 값을 구하여라.



발전

문제 5 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라 하고, $\overline{EG}$와 $\overline{FH}$의 교점을 M이라고 할 때, $\overrightarrow{AM}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



평면에서와 마찬가지로 공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며, 기호로 $\vec{a}/\!/\vec{b}$와 같이 나타낸다.

영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- 영벡터는 임의의 벡터와 평행하다고 생각할 수 있다.

공간벡터의 평행

영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a} \text{ (단, } k\text{는 0이 아닌 실수)}$$

- 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다. 역으로 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

보기 세 벡터 $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{r}=\vec{a}+2\vec{b}$에 대하여

$$\vec{p}+\vec{q}=(3\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-3\vec{b})=4\vec{a}-2\vec{b}$$
$$\vec{q}+\vec{r}=(\vec{a}-3\vec{b})+(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b}$$

이고, $\vec{p}+\vec{q}=2(\vec{q}+\vec{r})$이므로 $\vec{p}+\vec{q}$와 $\vec{q}+\vec{r}$는 서로 평행하다.

문제 6 공간에서 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=m\vec{a}-3\vec{b}$$

라고 할 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m의 값을 구하여라.

(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

02 공간벡터의 성분과 내적

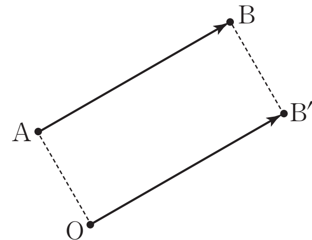
● 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

공간에서 위치벡터는 무엇인가?

탐구 활동

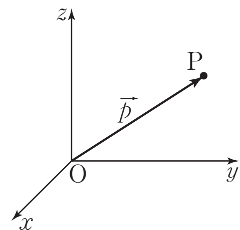
좌표공간에서 점 $A(1, -2, 3)$을 시점으로 하고 점 $B(2, 1, 4)$를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하여 점 A가 원점 O로 옮겨질 때, 점 B가 옮겨지는 점 B′의 좌표를 구하여 보자.
2. 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB'}$을 비교하여 보자.



평면에서와 마찬가지로 공간에서도 시점을 한 점 O로 정하면 공간에서 한 점 P와 벡터 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$는 일대일 대응한다. 이때 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 위치벡터라고 한다.

일반적으로 위치벡터의 시점 O는 좌표공간의 원점으로 잡는다.



예제 01

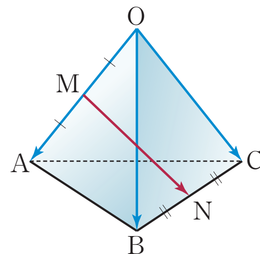
정사면체에서 두 모서리 OA, BC의 중점을 각각 M, N이라고 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{MN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.

풀이 점 M은 모서리 OA의 중점이므로 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$

점 N은 모서리 BC의 중점이므로

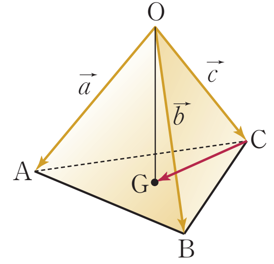
$$\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

따라서 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$



답 $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

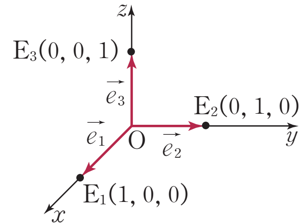
문제 1 오른쪽 그림과 같은 사면체에서 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이고 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{CG}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



공간벡터의 성분이란 무엇인가?

평면벡터와 같은 방법으로 공간벡터에 대해서도 그 성분을 생각할 수 있다.

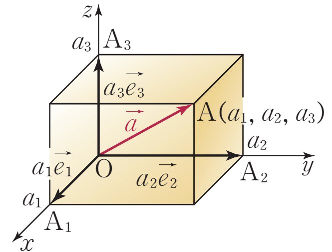
점 O를 원점으로 하는 좌표공간에서 세 점 $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$의 위치벡터 $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$을 각각 단위벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$으로 나타낸다.



임의의 공간벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되는 점 $A(a_1, a_2, a_3)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 $A_1(a_1, 0, 0)$, $A_2(0, a_2, 0)$, $A_3(0, 0, a_3)$이라 고 하면 $\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OA_3}=a_3\vec{e_3}$이고 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$이므로

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$

과 같이 나타낼 수 있다.



● 좌표공간에서 원점 O를 시점으로 하면 위치벡터 $\overrightarrow{OA}$는 종점 A의 좌표로 나타낼 수 있다.

이때 실수 a_1, a_2, a_3을 공간벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, a_1, a_2, a_3을 각각 공간벡터 $\vec{a}$의 x성분, y성분, z성분이라고 한다.

또 공간벡터 $\vec{a}$를 성분을 이용하여 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$과 같이 나타낸다.

보기 좌표공간에서 원점 O에 대한 점 $A(1, -2, 3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때

$$\vec{a}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}+3\vec{e_3}=(1, -2, 3)$$

문제 2 좌표공간에서 원점 O와 다음 점 A에 대하여 위치벡터 $\overrightarrow{OA}$를 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$으로 나타내어라.

(단, $\vec{e_1}=(1, 0, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1, 0)$, $\vec{e_3}=(0, 0, 1)$)

(1) $A(-1, 2, 3)$　　(2) $A(3, -4, 0)$

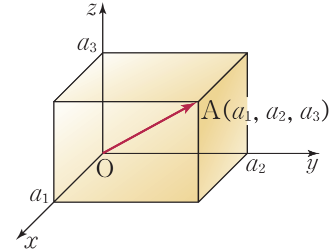
문제 3 다음 공간벡터를 성분으로 나타내어라. (단, $\vec{e_1}=(1, 0, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1, 0)$, $\vec{e_3}=(0, 0, 1)$)

(1) $\vec{a}=\vec{e_1}-3\vec{e_2}+2\vec{e_3}$　　(2) $\vec{b}=-2\vec{e_1}+4\vec{e_3}$

좌표공간 위의 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 크기는

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

이다.



또 좌표공간 위의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 서로 같을 조건을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

공간벡터의 크기와 두 공간벡터가 서로 같을 조건

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

(2) $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$

보기 $\vec{a}=(2,\ -2,\ 1)$, $\vec{b}=(x,\ y,\ z)$이고 $\vec{a}=\vec{b}$이면

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$

(2) $\vec{a}=\vec{b}$이므로 $x=2,\ y=-2,\ z=1$

문제 4 다음 공간벡터의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}=(1,\ 0,\ 2)$

(2) $\vec{b}=(2,\ 5,\ -3)$

문제 5 두 공간벡터 $\vec{a}=(2l,\ -5,\ n-2)$, $\vec{b}=(-6,\ m+2,\ 4-2n)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, 세 실수 l, m, n의 값을 각각 구하여라.

평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 성분을 이용하여 나타내면 다음이 성립한다.

공간벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

(3) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ (단, k는 실수)

보기 $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ 1,\ 4)$일 때

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ 3,\ 7)$

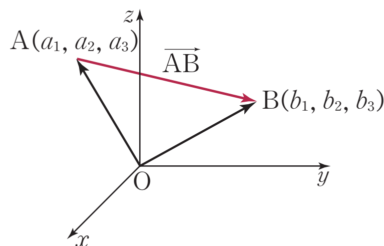
(2) $2\vec{a}-3\vec{b}=(8,\ 1,\ -6)$

문제 6 $\vec{a}=(1,\ 1,\ -2)$, $\vec{b}=(2,\ 0,\ -3)$, $\vec{c}=(-1,\ 4,\ 1)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내어라.

(1) $\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{c}$　　　　(2) $2(-\vec{a}+3\vec{b})+3(\vec{a}+4\vec{c})$

문제 7 $\vec{a}=(-1,\ -1,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ -4,\ -2)$일 때, $\vec{x}+\vec{b}=2\vec{a}-2\vec{x}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 성분으로 나타내어라.

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이므로



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(b_1,\ b_2,\ b_3)-(a_1,\ a_2,\ a_3)\\&=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)\end{aligned}$$

이고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 크기는

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 점에 대한 공간벡터의 성분과 크기

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2\ b_3-a_3)$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

보기 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ -3)$, $\mathrm{B}(-1,\ 2,\ 1)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1-2,\ 2-1,\ 1-(-3))=(-3,\ 1,\ 4)$

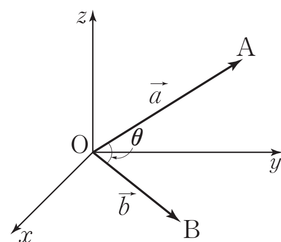
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-3)^2+1^2+4^2}=\sqrt{26}$

문제 8 다음 두 점 A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 성분과 크기를 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(1,\ -2,\ -3)$, $\mathrm{B}(3,\ -4,\ -1)$

(2) $\mathrm{A}(-3,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1,\ -5)$

공간벡터의 내적이란 무엇인가?



평면에서와 마찬가지로 공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$인 세 점 O, A, B를 정할 때, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.

이때 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 기호로

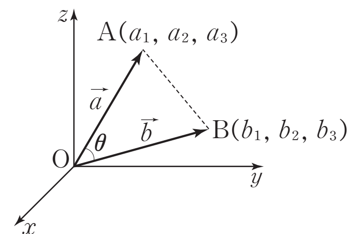
$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

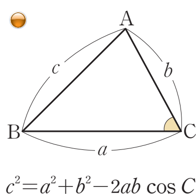
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다.

공간벡터의 내적의 성분 표시도 평면에서의 벡터와 마찬가지로 생각한다.



오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라고 하자. 이때 삼각형 OAB에서



$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$가 성립한다.

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$$
$$\overline{\mathrm{OA}}^2=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$
$$\overline{\mathrm{OB}}^2=|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$$

이므로 $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$이다. 그런데 $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

공간벡터의 내적

(1) 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0\le\theta\le\pi)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

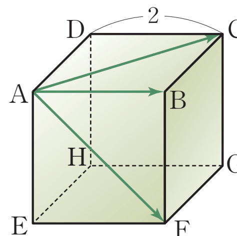
(2) $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

예제 **02** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$



풀이 (1) $\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이다.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$$

(2) 삼각형 ACF는 정삼각형이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

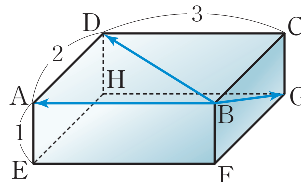
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AF}|\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=4$$

답 (1) 4 (2) 4

문제 **9** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=3$, $\overline{AE}=1$인 직육면체에서 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$

(2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BG}$



문제 **10** 다음 두 공간벡터의 내적을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(2,\ 4,\ 1)$, $\vec{b}=(3,\ 2,\ -2)$

(2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ -3)$, $\vec{b}=(1,\ 0,\ -1)$

평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터도 다음과 같이 내적에 대한 연산법칙이 성립한다.

공간벡터의 내적의 연산법칙

세 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (결합법칙)

문제 **11** 세 공간벡터 $\vec{a}=(-2,\ 1,\ 3)$, $\vec{b}=(4,\ -3,\ 5)$, $\vec{c}=(3,\ 0,\ -1)$과 실수 k에 대하여 내적의 연산법칙 (1), (2), (3)이 성립함을 확인하여라.

두 공간벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라고 하면 내적의 정의에 의하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 공간벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$일 때

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

보기 두 공간벡터 $\vec{a}=(-1,\ 3,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$이 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$\cos\theta=\frac{(-1)\times2+3\times1+2\times3}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

문제 12 다음 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구하여라.

(1) $\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)$　　(2) $\vec{a}=(0,\ -1,\ 0)$, $\vec{b}=(2,\ 0,\ 1)$

예제 03 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 k의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(3,\ k,\ 2)$, $\vec{b}=(k,\ 4,\ -7)$에 대하여 $\vec{a}\perp\vec{b}$

(2) $\vec{a}=(-1,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ k,\ -2)$에 대하여 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

- $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
- $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

풀이 (1) $\vec{a}\perp\vec{b}$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로 $3k+4k-14=0$, $k=2$

(2) $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$이므로 $2k-4=\pm\sqrt{6}\sqrt{k^2+8}$, $k=-4$

답 (1) 2　(2) -4

문제 13 다음 두 공간벡터가 서로 수직일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}=(2,\ k-1,\ 5)$, $\vec{b}=(k,\ 3,\ k)$　　(2) $\vec{a}=(2,\ 4,\ k)$, $\vec{b}=(1,\ k,\ 1)$

발전 **문제 14** 정육면체의 한 대각선과 한 모서리가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

예제 04 사면체 OABC에서 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$이면 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$임을 증명하여라.

증명 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 하면 $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$,

$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$에서 $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

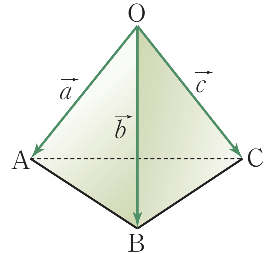
$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$에서 $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$이므로 $\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$이다.

$\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{AB}$의 내적을 구하면

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

따라서 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$이다.



문제 15 벡터의 내적을 이용하여 정사면체 OABC에서 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$임을 증명하여라.

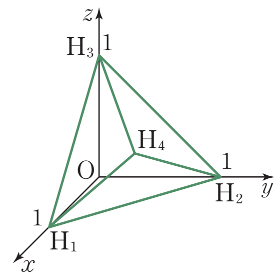
창의 up

두 공간벡터 $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)$에 동시에 수직인 단위벡터를 구하는 방법을 설명하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제와 관련하여 다음을 해결해 보자.

분자식이 CH_4인 메테인 분자의 구조를 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 세 개의 수소 원자 H_1, H_2, H_3을 각각 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$의 위치에 놓았다고 할 때, 탄소 원자(C)와 나머지 하나의 수소 원자(H_4)의 좌표를 구하여라.



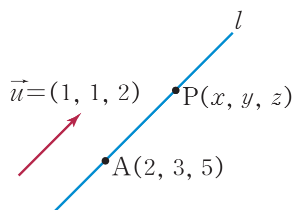
03 직선의 방정식

● 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.

좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 어떻게 구하는가?

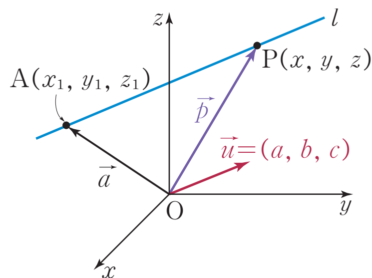
탐구 활동

오른쪽 그림에서 $\vec{u}=(1,\ 1,\ 2)$이고 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$는 점 $\mathrm{A}(2,\ 3,\ 5)$를 지나는 직선 l 위에 있다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$ (t는 실수)일 때, 벡터의 성분을 이용하여 x, y, z를 t의 식으로 나타내어 보자.

2. **1**의 결과에서 t를 소거하여 x, y, z 사이의 관계식을 구하여 보자.



평면에서와 마찬가지로 좌표공간에서 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$에 평행한 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}/\!/\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$를 만족시키는 실수 t가 존재한다.

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{p}-\vec{a}$이므로 $\vec{p}-\vec{a}=t\vec{u}$에서

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

● ①을 직선 l의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 실수 t의 값이 변함에 따라 점 A를 지나고, 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 직선 l을 나타낸다. 이때 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 방향벡터라고 한다.

이제 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내어 보자.

$\vec{u}=(a,\ b,\ c)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$이므로 ①은

$$(x,\ y,\ z)=(x_1,\ y_1,\ z_1)+t(a,\ b,\ c)=(x_1+at,\ y_1+bt,\ z_1+ct)$$

이다. 따라서 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x=x_1+at,\ y=y_1+bt,\ z=z_1+ct \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 여기서 $abc\neq0$일 때, t를 소거하면 다음과 같은 직선 l의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

● $abc\neq0$일 때, ②를 직선 l의 매개변수방정식이라 하고, t를 매개변수라고 한다. 즉, 공간에서 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식은 직선의 매개변수 표현이다.

한편 $abc=0$일 때, ②에서 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

예를 들어 $a=0$, $bc\neq0$일 때 직선 l의 방정식은

$$x=x_1,\ \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 yz평면과 평행한 직선을 나타낸다.

또 $a\neq0$, $b=0$, $c=0$일 때 직선 l의 방정식은

$$y=y_1,\ z=z_1$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 x축과 평행한 직선을 나타낸다.

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

이고, 이 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나므로 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 직선의 방정식

(1) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\ \ (\text{단, } abc\neq0)$$

(2) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ \ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2)$$

$x_1=x_2$, $y_1\neq y_2$, $z_1\neq z_2$일 때 직선의 방정식은

$$x=x_1,\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

보기 (1) 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(4,\ 1,\ 3)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(2,\ -3,\ 7)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{7}$$

(2) 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 5,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{5-3}=\frac{z-1}{-2-1} \text{ 이므로 } \frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-3}$$

문제 1 좌표공간에서 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 1)$을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(-5,\ 1,\ 3)$인 직선

(2) 점 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(0,\ 1,\ -1)$인 직선

(3) 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1,\ 2)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(0,\ 2,\ 0)$인 직선

(4) 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 2,\ -1)$을 지나는 직선

예제 **01** 좌표공간에서 점 A(0, 1, 1)을 지나고, 직선 $\frac{x+2}{-3}=\frac{1-y}{2}=\frac{z}{5}$와 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 주어진 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(-3,\ -2,\ 5)$이다.
따라서 구하는 직선은 점 A(0, 1, 1)을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(-3,\ -2,\ 5)$인 직선이므로 $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{5}$

답 $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{5}$

문제 **2** 좌표공간에서 점 A(1, −1, 0)을 지나고, 다음 직선과 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

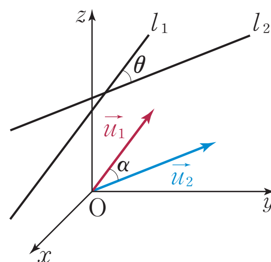
(1) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{5}$

(2) $x=t+1,\ y=-2t-4,\ z=3t+5$ (단, t는 실수)

좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

평면에서와 마찬가지로 좌표공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여 보자.

방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$인 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 두 벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 각의 크기를 α라고 할 때, 다음이 성립한다.



두 직선이 이루는 각의 크기는 α와 $\pi-\alpha$ 중 크지 않은 쪽이다.

$$\cos\theta=|\cos\alpha|=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

예제 **02** 좌표공간에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x+1}{2}=y-2=z,\ l_2:\ x-1=\frac{y-2}{2}=3-z$$

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(2,\ 1,\ 1)$, $\vec{u_2}=(1,\ 2,\ -1)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\cos\theta=\frac{|2\times1+1\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

문제 3 좌표공간에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$l_1:\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{4},\ l_2:\ x-1=\frac{y+2}{10}=\frac{z-3}{7}$$

한편 평면에서와 마찬가지로 좌표공간에서 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$일 때, 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다.

또 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 직선의 평행 · 수직 조건

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\vec{u_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$일 때

(1) 평행 조건: $l_1 /\!/ l_2 \iff \vec{u_1}=t\vec{u_2}$ (단, t는 0이 아닌 실수)

$\iff a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$

(2) 수직 조건: $l_1 \perp l_2 \iff \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$

$\iff a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

예제 03 좌표공간에서 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$l_1:\ \frac{2-x}{3}=\frac{y-1}{k}=\frac{z}{6},\ l_2:\ x=\frac{y}{-3}=\frac{z-5}{-2}$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(-3,\ k,\ 6)$, $\vec{u_2}=(1,\ -3,\ -2)$이고

(1) $l_1 /\!/ l_2$일 때, $-3 : k : 6 = 1 : -3 : -2$이므로 $k=9$

(2) $l_1 \perp l_2$일 때, $-3\times1+k\times(-3)+6\times(-2)=0$이므로 $k=-5$

답 (1) 9 (2) -5

문제 4 좌표공간에서 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$l_1:\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{k}=z,\ l_2:\ \frac{x-1}{k+1}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{2}$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

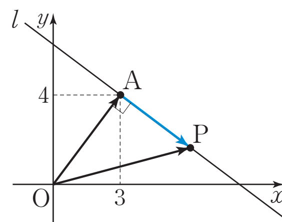
04 평면과 구의 방정식

● 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.

좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식을 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 점 $\mathbf{A(3,\ 4)}$를 지나고 $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$에 수직인 직선 $\boldsymbol{l}$ 위의 임의의 점 $\mathbf{P}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



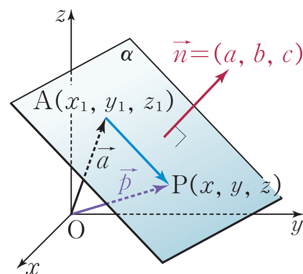
1. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 x성분과 y성분을 구하여 보자.

2. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$임을 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 구하여 보자.

좌표공간에서 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면 α의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$$



이다. 이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

● ①을 평면 α의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α 위에 있다.

따라서 ①은 평면 α를 나타낸다. 이때 벡터 $\vec{n}$을 평면 α의 법선벡터라고 한다.

이제 평면 α의 방정식 ①을 성분으로 나타내어 보자.

평면 α의 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$이고, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$$

이고, 이것을 ①에 대입하면 내적의 정의에 의하여 다음과 같은 평면 α의 방정식을 얻는다.

● 평면의 법선벡터를 이용하여 나타낸 평면의 방정식은 평면의 방정식을 음함수로 나타낸 것이다.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 평면의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

예제 01 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$를 지나고, 법선벡터가 다음과 같은 평면의 방정식을 구하여라.

(1) $\vec{n}=(-1,\ 2,\ -2)$　　　(2) x축

풀이 (1) 법선벡터가 $\vec{n}=(-1,\ 2,\ -2)$이므로 구하는 평면의 방정식은

$-(x-1)+2y-2(z-2)=0$에서　$x-2y+2z-5=0$

(2) 법선벡터로 $\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$을 택할 수 있으므로 구하는 평면의 방정식은

$1\times(x-1)+0\times y+0\times(z-2)=0$에서　$x=1$

답 (1) $x-2y+2z-5=0$　(2) $x=1$

문제 1 좌표공간에서 다음 평면의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 2)$를 지나고, 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 1,\ -3)$인 평면

(2) 점 $\mathrm{A}(2,\ -3,\ 5)$를 지나고, 직선 $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+1}{2}$에 수직인 평면

(3) 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0,\ 2)$를 지나고, z축에 수직인 평면

평면의 방정식 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$을 변형하면

$$ax+by+cz-(ax_1+by_1+cz_1)=0$$

이다. 여기서 $-(ax_1+by_1+cz_1)=d$로 놓으면 평면의 방정식은

$$ax+by+cz+d=0$$

과 같이 x, y, z에 대한 일차방정식으로 나타내어진다.

일차방정식 $ax+by+cz+d=0$은 a, b, c 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $a\neq0$일 때

$$a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이 방정식은 점 $\left(-\frac{d}{a},\ 0,\ 0\right)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식이다.

같은 방법으로 $b\neq0$ 또는 $c\neq0$인 경우도 $a\neq0$인 경우와 마찬가지이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 일차방정식과 평면

좌표공간에서 x, y, z에 대한 일차방정식 $ax+by+cz+d=0$은 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면을 나타낸다.

좌표평면에서 x, y에 대한 일차방정식은 직선의 방정식이지만 좌표공간에서 x, y, z에 대한 일차방정식은 평면의 방정식이다.

예제 02 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 3,\ 3)$, $\mathrm{C}(1,\ 5,\ 0)$을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라고 하면 평면은 세 점 A, B, C를 지나므로

$$a+b-c+d=0,\ -a+3b+3c+d=0,\ a+5b+d=0$$

이 연립방정식을 풀어서 a, b, c를 각각 d로 나타내면

$$a=-\frac{7}{2}d,\ b=\frac{1}{2}d,\ c=-2d$$

그런데 $d=0$이면 $a=b=c=0$이므로 $d\neq0$

따라서 구하는 평면의 방정식은 $-\frac{7}{2}dx+\frac{1}{2}dy-2dz+d=0$에서

$$7x-y+4z-2=0$$

답 $7x-y+4z-2=0$

문제 2 좌표공간에서 다음 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$

(2) $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$

(3) $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{C}(2,\ 0,\ 1)$

예제 03

좌표공간에서 다음 두 평면의 교선의 방정식을 구하여라.

$$3x+2y-4z-1=0,\ x+y-z-5=0$$

풀이 두 평면의 교선은 두 평면의 방정식 $3x+2y-4z-1=0$, $x+y-z-5=0$을 동시에 만족시키는 점 $(x,\ y,\ z)$의 집합이다.

두 평면의 방정식에서 각각 y, x를 소거하면 $x-2z+9=0$, $-y-z+14=0$

z를 x, y로 나타내면 $z=\dfrac{x+9}{2}$, $z=-y+14$

따라서 구하는 교선의 방정식은 $\dfrac{x+9}{2}=\dfrac{y-14}{-1}=z$이다.

답 $\dfrac{x+9}{2}=\dfrac{y-14}{-1}=z$

공간에서 직선을 음함수로 표현하려면 평면의 방정식이 두 개 필요하다.

문제 3

좌표공간에서 다음 두 평면의 교선의 방정식을 구하여라.

$$x-y+z-1=0,\quad 2x+y-2z-1=0$$

예제 04

좌표공간에서 직선 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{4}$와 평면 $2x+3y-z+5=0$의 교점의 좌표를 구하여라.

풀이 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{4}=t$로 놓으면

$$x=3t+1,\ y=-t-2,\ z=4t \quad \cdots\cdots ①$$

①을 $2x+3y-z+5=0$에 대입하면

$2(3t+1)+3(-t-2)-4t+5=0$이므로 $t=1$

$t=1$을 ①에 대입하면 $x=4$, $y=-3$, $z=4$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(4,\ -3,\ 4)$이다.

답 $(4,\ -3,\ 4)$

문제 4

좌표공간에서 다음 직선과 평면의 교점의 좌표를 구하여라.

(1) 직선 $\dfrac{x}{2}=y-1=\dfrac{z+1}{2}$과 평면 $x+2y+3z-19=0$

(2) 직선 $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{z-2}{4}$, $y=-1$과 평면 $x+2y-z+3=0$

좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 두 평면 α, β에 대하여 물음에 답하여 보자.

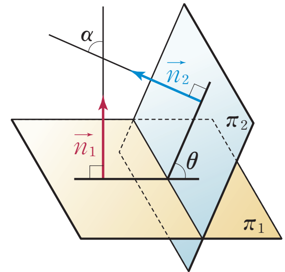
$$\alpha:\ 4x-y+z-7=0,\quad \beta:\ x+y+5=0$$

1. 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라고 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$를 구하여 보자.

2. **1**에서 구한 두 법선벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여 보자.

좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 평면 π_1, π_2의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$라고 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각의 크기를 α라고 하면 두 평면 π_1, π_2가 이루는 각의 크기 θ는 α와 $\pi-\alpha$ 중에서 크지 않은 쪽이다.



● 두 평면이 이루는 각의 크기 θ는 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.

이때 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|\cos\alpha$이므로 다음이 성립한다.

● $|\cos\theta|=|\cos(\pi-\alpha)|$

$$\cos\theta=|\cos\alpha|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

예제 05

좌표공간에서 두 평면 $x+2y+3z-3=0$, $2x-3y-z-6=0$이 이루는 각의 크기를 구하여라.

풀이 두 평면의 법선벡터는 각각 $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ 3)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ -3,\ -1)$이므로 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|1\times2+2\times(-3)+3\times(-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

문제 5 좌표공간에서 두 평면 $x-3y+\sqrt{6}z+2=0$, $2x-2y+3=0$이 이루는 각의 크기를 구하여라.

한편 두 평면 α, β의 법선벡터가 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$일 때, 두 평면 α, β가 서로 평행하면 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다.

또 두 평면 α, β가 서로 수직이면 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 평면의 평행 · 수직 조건

두 평면 α, β의 법선벡터가 각각 $\overrightarrow{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$일 때

(1) 평행 조건: $\alpha /\!/ \beta \Longleftrightarrow \overrightarrow{n_1}=t\overrightarrow{n_2}$ (단, t는 0이 아닌 실수)

$\Longleftrightarrow a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$

(2) 수직 조건: $\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}=0$

$\Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

예제 06 좌표공간에서 두 평면 $2x-y+az-1=0$, $3x-2ay+z+5=0$이 서로 수직이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

풀이 주어진 두 평면의 법선벡터는 각각 $\overrightarrow{n_1}=(2,\ -1,\ a)$, $\overrightarrow{n_2}=(3,\ -2a,\ 1)$이고 두 평면이 서로 수직일 때 $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}=0$이므로

$$2\times3+(-1)\times(-2a)+a\times1=0,\ a=-2$$

답 -2

문제 6 다음을 구하여라.

(1) 두 평면 $ax+2y+bz+2=0$, $2x+y-3z=0$이 서로 평행하도록 하는 상수 a, b의 값

(2) 두 평면 $ax-2y+2z=0$, $2x+y-4z=0$이 서로 수직이 되도록 하는 상수 a의 값

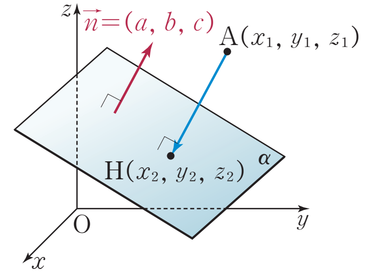
창의 up

좌표공간에서 직선 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$과 평면 $ax+by+cz+d=0$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하는 방법을 설명하여라.

좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리는 어떻게 구하는가?

좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 평면 $\alpha : ax+by+cz+d=0$ 위에 있지 않은 한 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$에서 평면 α에 내린 수선의 발을 $H(x_2,\ y_2,\ z_2)$라고 하면 점 A와 평면 α 사이의 거리는 벡터 $\overrightarrow{AH}$의 크기와 같다.



이때

$$\overrightarrow{AH}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

이고, 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 대하여 $\overrightarrow{AH} /\!/ \vec{n}$이므로

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}=\pm|\vec{n}||\overrightarrow{AH}|$$

에서

$$|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}|=|\vec{n}||\overrightarrow{AH}|$$

$$|\overrightarrow{AH}|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}|}{|\vec{n}|}=\frac{|a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다. 이때 점 $H(x_2,\ y_2,\ z_2)$는 평면 α 위의 점이므로 $ax_2+by_2+cz_2+d=0$이다.

따라서

$$\begin{aligned} a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1) &= ax_2+by_2+cz_2-(ax_1+by_1+cz_1) \\ &= -(ax_1+by_1+cz_1+d) \end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{AH}|=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리

점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

수학 Ⅰ 좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

보기 점 $A(1,\ -2,\ -1)$과 평면 $x-y+3z+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\times1+(-1)\times(-2)+3\times(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{11}}{11}$$

문제 7 다음 점과 평면 사이의 거리를 구하여라.

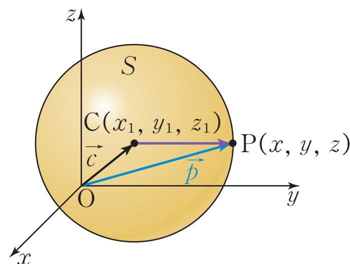
(1) 점 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 5)$와 평면 $x-y+3z-8=0$

(2) 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$과 평면 $x-2y+3z-9=0$

좌표공간에서 벡터를 이용하여 구의 방정식을 어떻게 구하는가?

좌표공간에서 중심이 점 $\mathrm{C}(x_1,\ y_1,\ z_1)$이고, 반지름의 길이가 r인 구 S의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 구 S 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라고 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$이다.



이때 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{p}-\vec{c}$이므로 $|\vec{p}-\vec{c}|=r$에서

$$|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$$

이고,

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이 성립한다.

$|\vec{x}|=a$
$\Longleftrightarrow |\vec{x}|^2=a^2$
$\Longleftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{x}=a^2$

한편 $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{c}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{p}-\vec{c}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$$

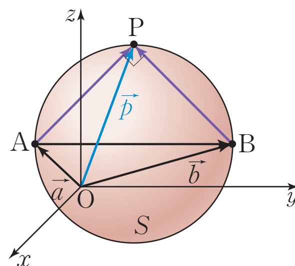
이고, 이것을 ①에 대입하면

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\cdot(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=r^2$$

이므로 다음과 같은 구 S의 방정식을 얻는다.

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

이제 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구 S의 방정식을 구하여 보자.



오른쪽 그림과 같이 구 S 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

이다. 이때 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{p}-\vec{b}$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

이 성립한다.

한편 $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1),\ \vec{p}-\vec{b}=(x-x_2,\ y-y_2,\ z-z_2)$$

이고, 이것을 ②에 대입하면

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\cdot(x-x_2,\ y-y_2,\ z-z_2)=0$$

이므로 다음과 같은 구 S의 방정식을 얻는다.

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 구의 방정식

(1) 중심이 $\mathrm{C}(x_1,\ y_1,\ z_1)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

(2) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식은

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

예제 07 좌표공간에서 다음 구의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 5인 구

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 4,\ 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구

풀이 (1) 중심이 $(2,\ -1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 5이므로

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$$

(2) $(x+1)(x-3)+(y-2)(y-4)+(z-1)(z-3)=0$이므로

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=6$$

답 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$ (2) $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=6$

문제 8 좌표공간에서 중심이 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 4인 구의 방정식을 구하여라.

문제 9 좌표공간에서 다음 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구하여라.

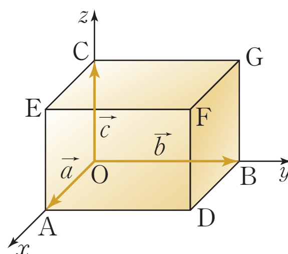
(1) $\mathrm{A}(-4,\ 3,\ -5)$, $\mathrm{B}(2,\ 3,\ -1)$

(2) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-2,\ 4,\ -8)$



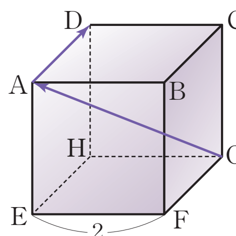
중단원 기초

1 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AG}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



01 공간벡터의 뜻과 그 연산
공간벡터의 연산

2 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GA}$의 값을 구하여라.



02 공간벡터의 성분과 내적
공간벡터의 내적

3 좌표공간에서 두 점 A$(1,\ 4,\ -10)$, B$(3,\ -1,\ 0)$을 지나는 직선이 zx평면과 만나는 점의 좌표를 구하여라.

03 직선의 방정식

4 좌표공간에서 두 직선

$$l_1:\ \frac{x+1}{2}=3-y=\frac{z-1}{2},\ l_2:\ x-2=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{2}$$

가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

03 직선의 방정식
두 직선이 이루는 각의 크기

5 좌표공간에서 점 A$(0,\ -2,\ 2)$를 지나고, 평면 $x-2y+3z+4=0$에 평행한 평면의 방정식을 구하여라.

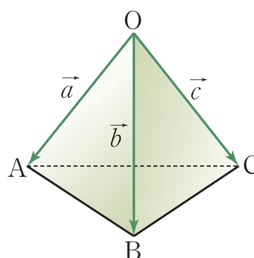
04 평면과 구의 방정식
평면의 방정식

[해답 p.220]

중단원 기본

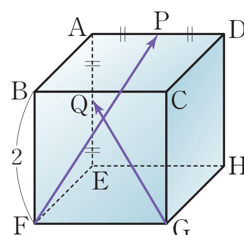
수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 정사면체에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



01 공간벡터의 뜻과 그 연산
공간벡터의 연산

2 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 두 모서리 AD, AE의 중점을 각각 P, Q라고 하자. 이때 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{GQ}$의 값을 구하여라.



02 공간벡터의 성분과 내적
공간벡터의 내적

3 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하여라.

02 공간벡터의 성분과 내적
공간벡터의 내적

4 좌표공간에서 두 평면 $3x+4y+5z-12=0$, $4x-3y+5z+12=0$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta$의 값을 구하여라.

04 평면과 구의 방정식
두 평면이 이루는 각의 크기

5 좌표공간에서 중심의 좌표가 $(1,\ 1,\ 4)$이고, 평면 $x+y-12=0$에 접하는 구의 방정식을 구하여라.

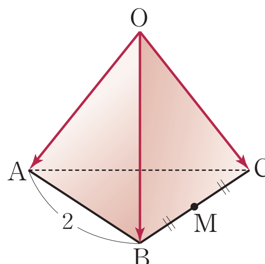
04 평면과 구의 방정식
구의 방정식

중단원 실력

1 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OM}\ (0\le t\le 1)$$

을 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 길이를 구하여라.



02 공간벡터의 성분과 내적
위치벡터

2 좌표공간에서 두 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 2,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{p}$가 등식 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$을 만족시킬 때, 벡터 $\vec{p}$의 종점 P가 그리는 도형의 겉넓이를 구하여라.

02 공간벡터의 성분과 내적
04 평면과 구의 방정식
공간벡터의 내적
구의 방정식

3 좌표공간에서 두 직선 $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}$, $\frac{x+3}{4}=\frac{y+7}{5}=\frac{z+4}{3}$의 교점의 좌표를 구하여라.

03 직선의 방정식

4 좌표공간에서 평면 α: $x-3y+2z=0$ 위에 있지 않은 한 점 P$(2,\ -2,\ 3)$에서 평면 α에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구하여라.

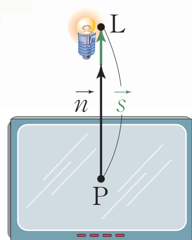
04 평면과 구의 방정식

5 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z+k=0 \end{cases}$이 해를 가지기 위한 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

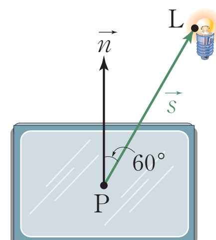
04 평면과 구의 방정식
점과 평면 사이의 거리
구의 방정식

각도와 빛의 밝기

빛을 사방으로 반사하고 흐트러뜨리는 평면에 광원(L)으로부터 빛이 비추어진다고 가정하자. 이때 평면 위의 점 P의 밝기는 빛과 평면이 이루는 각에 의해 결정된다. $\vec{s}=\overrightarrow{PL}$이라 하고, 점 P를 시점으로 하고 평면과 수직인 벡터를 $\vec{n}$, $\vec{n}$과 $\vec{s}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면, 점 P의 밝기는 $\cos\theta$에 비례한다. 즉, [그림 1]과 같이 $\theta=0°$일 때 최대가 되고, [그림 2]와 같이 $\theta=60°$일 때 최대 밝기의 $\frac{1}{2}$이 된다.

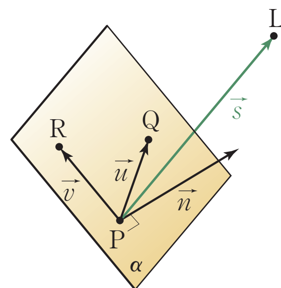


[그림 1]



[그림 2]

세 점 P(−3, 5, 1), Q(−4, 5, 2), R(−3, 4, 4)를 포함하는 평면 α와 평면 밖의 점 L(−5, 9, 7)에 위치한 광원이 있다. $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}=\overrightarrow{PR}$, $\vec{s}=\overrightarrow{PL}$이라 하고 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



| 과 제 | **1** 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$를 각각 성분으로 나타내어라.

| 과 제 | **2** 평면에 수직인 법선벡터 $\vec{n}$을 구하여라.

| 과 제 | **3** 두 벡터 $\vec{n}$, $\vec{s}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.
(단, $\sqrt{56}=7.5$, $\sqrt{11}=3.3$으로 계산한다.)

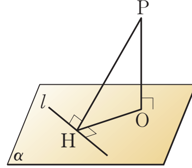
| 과 제 | **4** 화면의 밝기는 보통 0부터 255까지의 정수로 나타낸다. 가장 밝은 경우를 255라고 할 때, 이 평면 위의 점 P의 밝기를 나타내는 정수를 구하여라.

대단원 학습 내용 정리

1 공간도형

삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 점 O를 지나지 않는 α 위의 한 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H에 대하여



(1) $\overline{\text{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\text{OH}}\perp l$이면 $\overline{\text{PH}}\perp l$

(2) $\overline{\text{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\text{PH}}\perp l$이면 $\overline{\text{OH}}\perp l$

(3) $\overline{\text{PH}}\perp l$, $\overline{\text{OH}}\perp l$, $\overline{\text{PO}}\perp\overline{\text{OH}}$이면 $\overline{\text{PO}}\perp\alpha$

이면각과 정사영

(1) 두 평면 α, β가 만날 때, 한 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어지는 도형을 이면각이라고 한다.

(2) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발 A′을 점 A의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

① 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\overline{\text{A}'\text{B}'}=\overline{\text{AB}}\cos\theta$$

② 도형 F의 평면 α 위로의 정사영을 F′이라 하고, 도형 F를 포함하는 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기를 θ, 도형 F와 도형 F′의 넓이를 각각 S, S'이라고 하면

$$S'=S\cos\theta$$

2 공간좌표

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

두 점 $\text{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\text{B}(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\text{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

두 점 $\text{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\text{B}(x_2, y_2, z_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\text{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\text{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

구의 방정식

중심이 $\text{C}(a, b, c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

3 공간벡터

공간벡터의 성분

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

(2) $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$

(3) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

(4) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$

(5) $k\vec{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$ (단, k는 실수)

공간벡터의 내적

두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기가 $\theta(0\leq\theta\leq\pi)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

좌표공간에서 직선의 방정식

점 $\text{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a, b, c)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \text{ (단, } abc\neq0)$$

좌표공간에서 평면과 구의 방정식

(1) 점 $\text{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

(2) 중심이 $\text{C}(x_1, y_1, z_1)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

용어와 기호 교선, 삼수선의 정리, 이면각(변, 면, 크기), 정사영, 좌표공간, 공간좌표, 공간벡터, $\text{P}(a, b, c)$

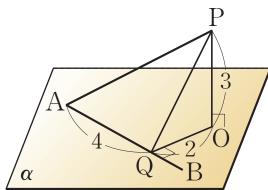
대/단/원 평가 문제

선택형

1 다음 중에서 옳지 않은 것은?

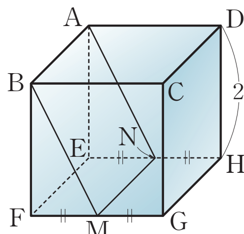
① 평행한 두 직선은 한 평면 위에 있다.
② 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면 위에 있다.
③ 한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면 위에 있다.
④ 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점은 한 평면 위에 있다.
⑤ 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있다.

2 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라고 하자. $\overline{OP}=3$, $\overline{OQ}=2$, $\overline{AQ}=4$일 때, 선분 AP의 길이는?



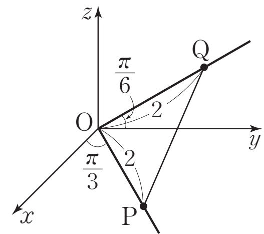
① $\sqrt{23}$ ② 5 ③ $3\sqrt{3}$
④ $\sqrt{29}$ ⑤ $\sqrt{31}$

3 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 $\overline{FG}$, $\overline{EH}$의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, 사각형 DCGH의 평면 ABMN 위로의 정사영의 넓이는?



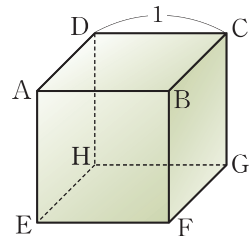
① $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

4 xy 평면 위의 점 P와 yz평면 위에 점 Q에 대하여 $\overline{OP}=\overline{OQ}=2$이고 반직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$, 반직선 OQ가 y축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는?
(단, 점 O는 원점이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

5 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}|$의 값은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

6 두 공간벡터 $\vec{a}=(3,\ -1,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$에 대하여 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$의 값은?

① -25 ② -24 ③ -23
④ -22 ⑤ -21

7 좌표공간에서 원점 O$(0,\ 0,\ 0)$과 직선 $x-1=y+1=\frac{z}{3}$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

8 좌표공간에서 평면 $2x-y+az=4$와 직선 $-x=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{2}$이 평행하도록 하는 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

9 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(-3, 1, -1)$, $\mathrm{B}(-5, -5, 0)$, $\mathrm{C}(1, 1, 1)$을 지나는 평면 α와 원점 사이의 거리는?

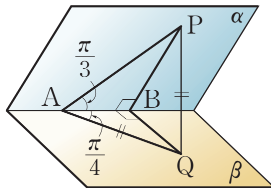
① $\frac{3}{7}$　② $\frac{5}{7}$　③ 1　④ $\frac{9}{7}$　⑤ $\frac{11}{7}$

10 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(0, 8, -7)$, $\mathrm{B}(1, 5, -3)$과 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값을 k라고 할 때, k^2의 값은?

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

서답형

11 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q는 각각 서로 만나는 두 평면 α, β 위의 점이고, 두 점 A, B는 두 평면 α, β의 교선 위의 점이다. $\angle\mathrm{PAB}=\frac{\pi}{3}$, $\angle\mathrm{QAB}=\frac{\pi}{4}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이고 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



12 세 점 $\mathrm{A}(a, 1, 2)$, $\mathrm{B}(3, b, 4)$, $\mathrm{C}(5, 6, c)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(7, 8, 9)$일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

13 $\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(-1, 5, 2)$, $\vec{c}=(2, 4, 0)$일 때, 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$가 이루는 각 θ의 크기를 구하여라. (단, $0\le\theta\le\pi$)

|서|술|형|

14 평면 $x+2y+2z-9=0$이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

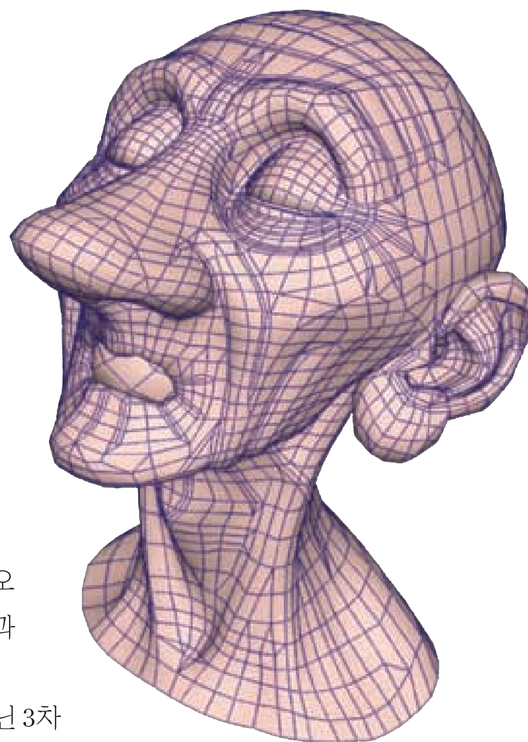
|서|술|형|

15 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(4, 2, 4)$, $\mathrm{B}(3, -2, 1)$, $\mathrm{C}(0, 7, 1)$을 지나는 구의 중심이 yz 평면 위에 있을 때, 이 구의 반지름의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

M+ Technology

수 학 ✚ 기 술

컴퓨터와 기하학



수학과 컴퓨터 과학의 제휴는 많은 분야에서 성과를 발휘하고 있는데, 그 분야 중 하나가 애니메이션 영화이다. 애니메이션이라고 하면 손으로 그리는 그림만을 떠올리기 쉽지만 〈토이 스토리〉와 같은 유명한 애니메이션 영화를 만들어낸 픽사 애니메이션 스튜디오에서는 애니메이션 영화를 만들 때 수학과 컴퓨터 과학을 이용하고 있다.

픽사는 본래 애니메이션을 만드는 회사가 아닌 3차원 컴퓨터 그래픽을 전문으로 하는 소프트웨어 회사인데, 단순히 시범 영상을 만들어 기술 자체만을 보여주는 것만으로는 흥미를 끌 수 없다고 생각하였다. 그래서 픽사에서 만들어낸 프로그램으로 움직임을 보이는 캐릭터를 만들고 그 캐릭터에 스토리를 입히면서 지금과 같은 애니메이션을 만드는 회사로 더 유명해졌다.





픽사에서 이용하는 수학은 사영 기하학인데, 이는 한 영역이나 차원에서 다른 영역이나 차원으로 이미지를 투영하여 차원이 2차원인 컴퓨터 스크린에서 3차원 이미지로 보일 수 있도록 해준다. 사영 기하학과 3차원 컴퓨터 그래픽 기술을 통해 〈인크레더블(The incredible)〉, 그리고 혼자서 체스를 하는 노인에 관한 단편 〈게리의 게임(Geri's Game)〉과 같은 애니메이션이 만들어졌다. 이 중 〈게리의 게임〉의 주인공 게리는 다면체를 연속적으로 세분하여 제어 그물을 형성하는 컴퓨터 그래픽 도구를 이용하여 만들어낸 캐릭터이다.

픽사의 애니메이션 연구자들은 사영 기하학 외에도 독립적인 장면들을 조립하는 데 유클리드 기하학을 사용하기도 한다. 작은 배경 조각들과 인물들이 각각 별도의 유클리드 스페이스에서 모형화된 다음 기하학 변환을 통해 영화의 한 장면으로 조립되는 것이다. 이와 같이 수학을 이용한 기술을 많이 사용하는 픽사는 수학에 대한 관심이 많고, 이를 영화 내에서 표현하기도 한다. 예를 들어 〈월-E〉에서 나오는 우주선의 이름은 수학에서 자주 볼 수 있는 용어인 정의(Definition)이고, 이 우주선의 함장이 모르는 단어를 물어볼 때에도 "정의해 보아라." 라는 표현을 쓰는 장면이 등장한다.

〈출처: 픽사(http://www.pixar.com)〉







부록

I 평면 곡선

|준|비|학|습|

[p. 11]

1 (1) $y=3x-3$ (2) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

2 (1) $y'=8x^3-8x$ (2) $y'=10(2x-1)^4$

3 (1) $y=4x-2$ (2) $y=3x+2$

1 이차곡선

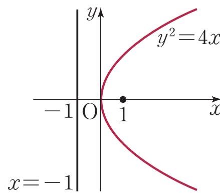
01 포물선

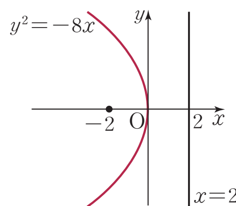
[p. 13~18]

1 (1) $y^2=12x$ (2) $y^2=-4x$

2 (1) 초점의 좌표: $(1,\ 0)$
준선의 방정식: $x=-1$

(2) 초점의 좌표: $(-2,\ 0)$
준선의 방정식: $x=2$

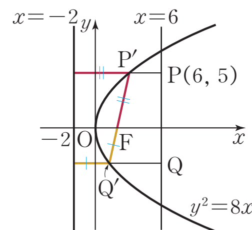




3 $(2,\ 0)$

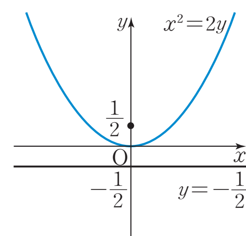
창의 up

$\overline{PP'}+\overline{P'F}=8$,
$\overline{QQ'}+\overline{Q'F}=8$이고
빛이 진행한 거리는
$\overline{PP'}+\overline{P'F}+\overline{FQ'}+\overline{Q'Q}$이므로
$8+8=16$

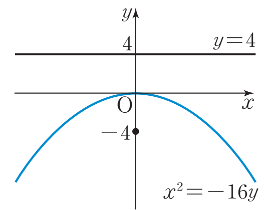


4 (1) $x^2=4y$ (2) $x^2=-12y$

5 (1) 초점의 좌표: $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$
준선의 방정식: $y=-\frac{1}{2}$



(2) 초점의 좌표: $(0,\ -4)$
준선의 방정식: $y=4$



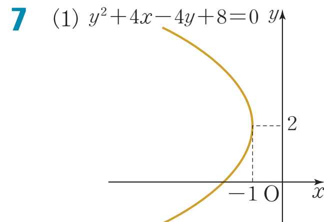
사고력 기르기

포물선 $x^2=4py$에서 초점이 꼭짓점에서 멀어질수록 곡선의 폭이 넓어지고, 초점이 꼭짓점에 가까워질수록 곡선의 폭이 좁아진다.

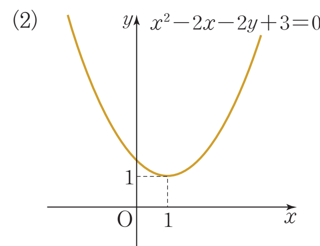
6 (1) 초점의 좌표: $(5,\ 1)$, 꼭짓점의 좌표: $(3,\ 1)$,
준선의 방정식: $x=1$

(2) 초점의 좌표: $(-1,\ -3)$, 꼭짓점의 좌표: $(-1,\ -2)$,
준선의 방정식: $y=-1$

7 (1) $y^2+4x-4y+8=0$



(2)



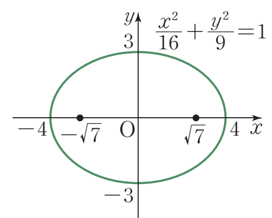
8 $x^2-4x+4y-4=0$

02 타원

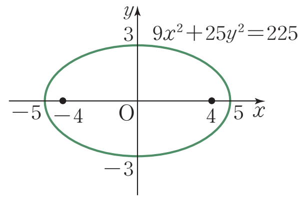
[p. 19~24]

1 (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

2 (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{7},\ 0)$,
$(-\sqrt{7},\ 0)$
장축의 길이: 8
단축의 길이: 6

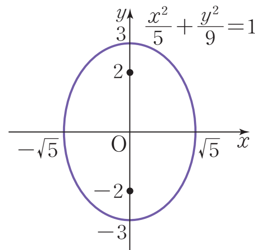


(2) 초점의 좌표: (4, 0), (−4, 0)
장축의 길이: 10
단축의 길이: 6

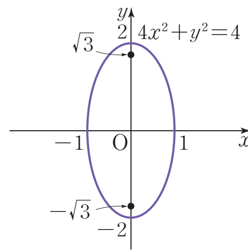


3 (1) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1$ (2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

4 (1) 초점의 좌표: (0, 2), (0, −2)
장축의 길이: 6
단축의 길이: $2\sqrt{5}$



(2) 초점의 좌표: $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$
장축의 길이: 4
단축의 길이: 2

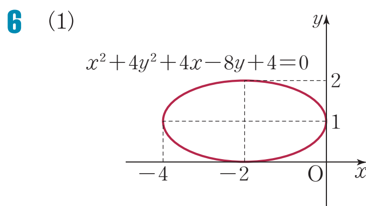


사고력 기르기

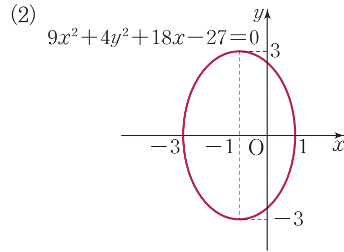
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점 사이가 서로 멀어지면 장축에 가까워지는 타원이 되며 두 초점 사이가 서로 가까워지면 원에 가까워지는 타원이 된다.

5 (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{5}+2, 4)$, $(-\sqrt{5}+2, 4)$
꼭짓점의 좌표: (5, 4), (−1, 4), (2, 6), (2, 2)
(2) 초점의 좌표: (3, 1), (3, −5)
꼭짓점의 좌표: (7, −2), (−1, −2), (3, 3), (3, −7)

6 (1)

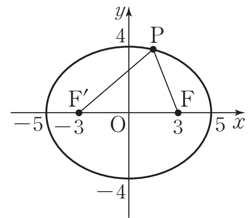


(2)



7 $\frac{(x-1)^2}{7}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

창의 up



오른쪽 그림과 같이 타원 모양의 연못을 좌표평면 위에 나타내면 F(3, 0), F′(−3, 0)이 되고, 이때 타원의 방정식을
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>b>0$)
이라고 하면 $2a=10$에서 $a=5$, $b=4$
삼각형 PF′F에서 $\overline{FF'}$을 밑변으로 생각하면 높이는 점 P의 좌표가 P(0, 4)일 때 최대가 된다.
따라서 삼각형 PF′F의 넓이의 최댓값은 12 m^2

03 쌍곡선 [p. 25~32]

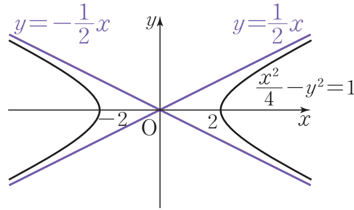
1 (1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$ (2) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

2 (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$
꼭짓점의 좌표: (2, 0), (−2, 0)
주축의 길이: 4
(2) 초점의 좌표: $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$
꼭짓점의 좌표: (2, 0), (−2, 0)
주축의 길이: 4

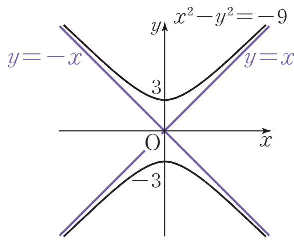
3 (1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ (2) $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{36}=-1$

4 (1) 초점의 좌표: $(0, \sqrt{7})$, $(0, -\sqrt{7})$
꼭짓점의 좌표: (0, 2), (0, −2)
주축의 길이: 4
(2) 초점의 좌표: $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$
꼭짓점의 좌표: (0, 1), (0, −1)
주축의 길이: 2

5 (1) 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{1}{2}x$



(2) 점근선의 방정식: $y=\pm x$

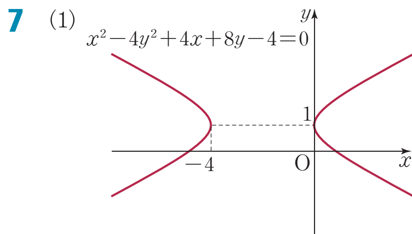


사고력 기르기

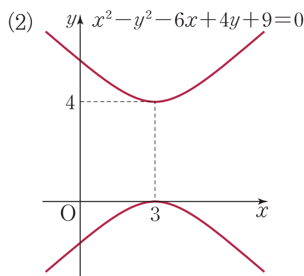
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 초점이 서로 멀어지면 두 곡선이 원점에서 멀어지는 쌍곡선이 되고, 두 초점이 서로 가까워지면 두 곡선이 원점에 가까워지는 쌍곡선이 된다.

6 (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{13}+1,\ 2)$, $(-\sqrt{13}+1,\ 2)$
꼭짓점의 좌표: $(4,\ 2)$, $(-2,\ 2)$
(2) 초점의 좌표: $(3,\ 3)$, $(3,\ -7)$
꼭짓점의 좌표: $(3,\ 2)$, $(3,\ -6)$

7 (1)



(2)



8 $\frac{(x-1)^2}{7}-\frac{(y-4)^2}{9}=-1$

창의 up

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$에서 $a=2$, $b=\sqrt{5}$이므로 $c=\sqrt{4+5}=3$
$\overline{PF'}=s$, $\overline{PF}=t$ $(s>t)$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여
$s-t=4$ …… ①
삼각형의 각의 이등분선의 정리에 의하여
$s:t=4:2$이므로
$s=2t$ …… ②
①, ②에서 $s=8$, $t=4$
따라서 $\overline{PF'}+\overline{F'F}+\overline{PF}=8+6+4=18$

9 (1) 타원 (2) 쌍곡선

| 단원 과제 |

$x^2-5y^2+4x-1=0$, $\frac{(x+2)^2}{5}-y^2=1$
따라서 이차곡선 $x^2-5y^2+4x-1=0$은
$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1$의 형태이므로 쌍곡선을 나타낸다.

중단원 기초 [p.33]

1 (1) 초점의 좌표: $(-4,\ 0)$, 꼭짓점의 좌표: $(0,\ 0)$,
준선의 방정식: $x=4$
(2) 초점의 좌표: $\left(0,\ \frac{1}{8}\right)$, 꼭짓점의 좌표: $(0,\ 0)$,
준선의 방정식: $y=-\frac{1}{8}$

2 (1) $y^2=8x$ (2) $(x-1)^2=4(y-1)$

3 (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ (2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$

4 (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$
꼭짓점의 좌표: $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$
장축의 길이: 4, 단축의 길이: 2
(2) 초점의 좌표: $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$
꼭짓점의 좌표: $(\sqrt{2},\ 0)$, $(-\sqrt{2},\ 0)$,
$(0,\ \sqrt{3})$, $(0,\ -\sqrt{3})$
장축의 길이: $2\sqrt{3}$, 단축의 길이: $2\sqrt{2}$

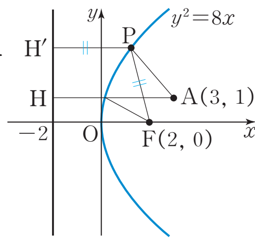
5 (1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ (2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$

6 (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$
꼭짓점의 좌표: $(\sqrt{2},\ 0)$, $(-\sqrt{2},\ 0)$
주축의 길이: $2\sqrt{2}$, 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$
(2) 초점의 좌표: $(0,\ \sqrt{5})$, $(0,\ -\sqrt{5})$
꼭짓점의 좌표: $(0,\ \sqrt{3})$, $(0,\ -\sqrt{3})$
주축의 길이: $2\sqrt{3}$, 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$

중단원 기본 [p. 34]

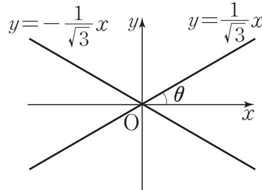
1 8

2 두 점 A, P에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 고 하면 $\overline{FP}=\overline{PH'}$
$\overline{FP}+\overline{AP}$
$=\overline{PH'}+\overline{AP}\geq\overline{AH}$
$=|3-(-2)|=5$



3 20 4 1

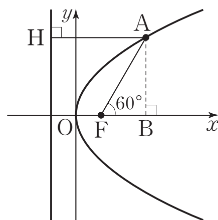
5 점근선의 방정식은
$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$이고,
$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$
따라서 두 점근선이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.



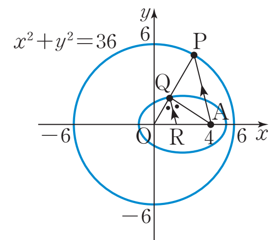
중단원 실력 [p. 35]

1 66

2 $\overline{AF}=\overline{AH}=120(\text{m})$
$\overline{FB}=120\cos 60°=60(\text{m})$
$\overline{OF}=\frac{1}{2}(\overline{AH}-\overline{FB})=30(\text{m})$
따라서 구하는 거리는 배가 원점 O에 있을 때이므로 30 m



3 △PQA는 이등변삼각형이므로 $\overline{QA}=\overline{QP}$
원 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}=6$으로 항상 일정하므로 점 Q의 자취는 두 점 O, A를 초점으로 하는 타원 위의 점이 된다.
이 타원은 두 초점으로부터의 거리의 합이 6이고 중심이 $(2,\ 0)$이므로
$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (단, $y\neq0$)



4 쌍곡선의 초점은 $F(5,\ 0)$, $F'(-5,\ 0)$이므로 $\overline{FF'}=10$
$\triangle PF'F=\triangle QFF'$이므로 $|b|=3$
이때 점 $P(a,\ b)$는 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2=32$
따라서 $a^2+b^2=32+9=41$

2 평면 곡선의 접선

01 음함수의 미분 [p. 37~44]

1 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+3y^2}$ (단, $x+3y^2\neq0$)
(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y-1}$ (단, $y\neq1$)
(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y}{x-3y^2}$ (단, $x-3y^2\neq0$)
(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y}{2x-3y}$ (단, $2x-3y\neq0$)

2 $y=-\frac{3}{2}x+4$

3 $a=-4,\ b=-1$

4 (1) $y=-x+2$ (2) $y=-\frac{2}{3}x-1$

5 (1) $y=\frac{1}{2}x+2$ (2) $y=\frac{3}{2}x-4$

창의 up

원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$이므로

$y_1\neq 0$일 때 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ …… ①

또 점 P는 원 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=r^2$ …… ②

①, ②에 의하여 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

한편 $y_1=0$일 때 접선의 방정식은 $x=r,\ x=-r$이므로 이 경우에도 $x_1x+y_1y=r^2$과 같이 나타낼 수 있다.

6 (1) $y=2x+3$ (2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

02 매개변수로 나타낸 함수의 미분 [p. 45~48]

1 (1) $\frac{dy}{dx}=2t^3+t$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2}{2t+1}$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-2t}{2t^2+1}$ (4) $\frac{dy}{dx}=\frac{12t^4+1}{2t^3}$

창의 up

(1) $r(t)=4+0.2t,\ V(t)=\frac{4}{3}\pi(4+0.2t)^3$

(2) $\frac{dr}{dt}=0.2,\ \frac{dV}{dt}=\frac{4}{5}\pi(4+0.2t)^2$

$\frac{dV}{dr}=4\pi(4+0.2t)^2$에서 $t=5$일 때의 값은 100π이다.

2 $y=x-4$

3 7

창의 up

타원: $\frac{x^2}{a^2}=\cos^2\theta,\ \frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$라고 놓으면

$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$

쌍곡선: $\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{\cos^2\theta},\ \frac{y^2}{b^2}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$라고 놓으면

$x=\frac{a}{\cos\theta},\ y=b\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

| 단원 과제 |

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{3}$이고

$x=a\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ y=\frac{a}{2}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a+2a$

중단원 기초 [p. 49]

1 $\frac{dy}{dx}=\frac{3x}{5y}$ (단, $y\neq 0$)

2 $-2\sqrt{2}$

3 $y=\frac{\sqrt{6}}{2}x-2\sqrt{6}$

4 $y=x-2$

5 $\frac{3t+2}{4t^2}$

6 $y=-x+10$

중단원 기본 [p. 50]

1 6

2 $\sqrt{2}$

3 28

4 3

5 -1

6 $\frac{dx}{dt}=2,\ \frac{dy}{dt}=2t$이므로 $\frac{dy}{dx}=t$

$x=2t-1$에서 $x=2$로 놓으면 $2=2t-1,\ t=\frac{3}{2}$

따라서 $f'(2)=\frac{3}{2}$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}=2f'(2)=2\times\frac{3}{2}=3$

중단원 실력 [p. 51]

1 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-3x^2y-y+b}{x^3+x-a}$

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-8+b}{-2-a}=1$

$a+b=6$ …… ①

한편 점 $(-1, 2)$는 곡선 위의 점이므로

$2a-b=-4$ …… ②

①, ②에서 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{16}{3}$

2 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=4p$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y}$

포물선 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면

점 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2p}{b}$이므로 접선의 방정식은 $y=\dfrac{2p}{b}x-\dfrac{2pa-b^2}{b}=\dfrac{2p}{b}x+\dfrac{2pa}{b}$

점 Q의 x좌표는 접선의 방정식의 x절편과 같으므로

$0=\dfrac{2p}{b}x+\dfrac{2pa}{b}$이고 $x=-a$

$\overline{OH}$는 점 P의 x좌표이므로 $\overline{OH}=a$이고

$\overline{QO}=|-a|$이므로 $\dfrac{\overline{QO}}{\overline{OH}}=\dfrac{a}{a}=1$

3 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $A(2, \sqrt{3})$에서의 접선 l의 방정식은 $\dfrac{2x}{16}+\dfrac{\sqrt{3}y}{4}=1$, $x+2\sqrt{3}y-8=0$

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$F(2\sqrt{3}, 0)$, $F'(-2\sqrt{3}, 0)$이므로

$\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}=\dfrac{8-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\cdot\dfrac{8+2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=4$

4 쌍곡선 $x^2-y^2=9$ 위의 점 $A(5, 4)$에서의 접선 l의 방정식은 $5x-4y=9$, $5x-4y-9=0$

주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$F(3\sqrt{2}, 0)$, $F'(-3\sqrt{2}, 0)$이므로

$\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}=\dfrac{|15\sqrt{2}-9|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}\cdot\dfrac{|-15\sqrt{2}-9|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=9$

5 $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2+4t-3}{4}$

$t=1$일 때 $x=2$, $y=0$이므로 $f(2)=0$, $g(0)=2$

따라서 $g'(0)=\dfrac{1}{f'(g(0))}=\dfrac{1}{f'(2)}$이다.

이때 $f'(2)$는 $x=2$, 즉 $t=1$일 때 $f'(x)$의 값이므로

$f'(2)=\dfrac{3+4-3}{4}=1$, $g'(0)=\dfrac{1}{f'(2)}=1$

대/단/원 평가 문제 [p. 54~55]

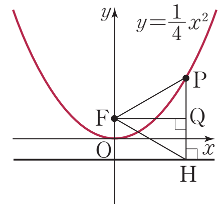
1 ⑤	2 ③	3 ④	4 ④	5 ①
6 ②	7 ③	8 ③	9 ⑤	10 ②
11 $y^2=2x-1$		12 48	13 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+1}{3y^2+1}$	
14 -2	15 풀이 참조		16 풀이 참조	

2 △PFH가 정삼각형이므로 점 Q는 $\overline{PH}$를 수직이등분한다.

이때 $\overline{QH}=2$이므로

$\overline{PH}=2\overline{QH}=4$

따라서 △PFH의 둘레의 길이는 $4\times3=12$

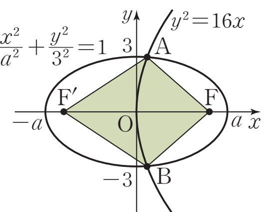


15 $y^2=16x$의 초점은 $(4, 0)$이고 이 점이 타원의 초점이므로 $a^2-3^2=4^2$, $a=5$

따라서 장축의 길이는 $2a=10$이므로 사각형 $AF'BF$의 둘레의 길이는

$(\overline{AF'}+\overline{AF})+(\overline{BF'}+\overline{BF})$

$=10+10=20$



16 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{dy}{dx}+\cos(xy)\cdot\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)$

$x=2$, $y=\pi$를 대입하면

$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{dy}{dx}+\cos 2\pi\cdot\left(\pi+2\dfrac{dy}{dx}\right)$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\pi}{6}$

Ⅱ 평면벡터

|준|비|학|습| [p. 61]

1 (1) $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ (2) $\overline{CO}$, $\overline{DO}$

2 (1) $\sqrt{13}$ (2) $3\sqrt{5}$

3 (1) $y=3x-1$ (2) $y=2x-3$

1 벡터의 연산

01 벡터의 뜻 [p. 63~65]

1 (1) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$
(2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$

2 $\sqrt{3}$

3 (1) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OE}$ (2) $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{OD}$

4 $25\sqrt{3}$

02 벡터의 연산 [p. 66~76]

1 (1)

(2)

2 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

3 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

4 (1)

(2)

5 (1) $-\vec{a}$ (2) $-\vec{a}+\vec{b}$ (3) $-\vec{a}-\vec{b}$

사고력 기르기

$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PB}$이므로 점 P는 선분 $\overline{AB}$의 중점이다.

6 (1)

(2)

(3)

창의 up

$\frac{1}{|\vec{a}|}=k$라고 하면 $k>0$이므로 벡터 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=k\vec{a}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$의 크기는 $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=1$이므로 단위벡터이다.

7 (1) $\vec{a}+17\vec{b}$ (2) $5\vec{a}-22\vec{b}+7\vec{c}$

8 (1) $\vec{x}=2\vec{a}-2\vec{b}$ (2) $\vec{x}=3\vec{a}+\vec{b}$

9 -2

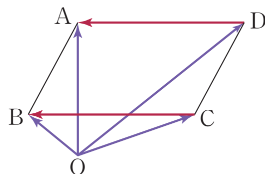
창의 up

$2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$이므로 $2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$
따라서 $\overline{DA}/\!/\overline{CB}$이고 $2\overline{DA}=\overline{CB}$이므로
사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

10 2

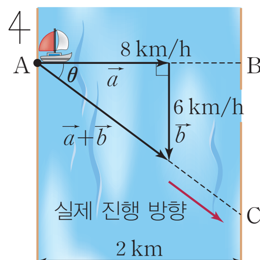
사고력 기르기

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$
즉, $\overline{DA}/\!/\overline{CB}$이고
$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|$이므로
사각형 ABCD는 평행사변형이다.



| 단원 과제 |

(1) 시속 10 km
(2) 배가 도착하게 되는 지점을 C라고 하면 바다를 건너는 데 움직여야 하는 거리는 $\overline{AC}$의 길이이므로
$10 : 8=\overline{AC} : 2$에서
$\overline{AC}=2.5$(km)
따라서 바다를 건너는 데 걸리는 시간은 $\frac{2.5}{10}$시간$=15$분



(3) $2 : \overline{BC}=8 : 6$에서 $\overline{BC}=\frac{3}{2}$(km)
따라서 배는 B 지점으로부터 $\frac{3}{2}$ km 떨어진 지점에 도착하게 된다.

중단원 기초 [p.77]

1 (1) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$ (2) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$

2 (1) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ (2) $-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$

3 (1) $\overrightarrow{AE}$ (2) $\vec{0}$

4 (1) $\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}$ (2) $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}$

5 3

중단원 기본 [p.78]

1 3

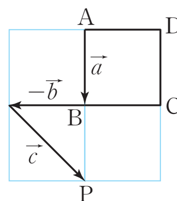
2 (1) $-\vec{a}+\vec{b}$ (2) $2\vec{a}+\vec{b}$

3 $\vec{a}+2\vec{b}$

4 -2

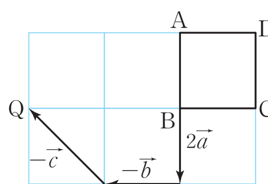
중단원 실력 [p.79]

1 (1)



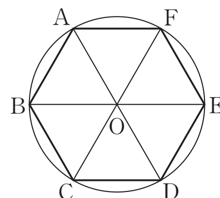
$|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=|\overrightarrow{AP}|=2$

(2)

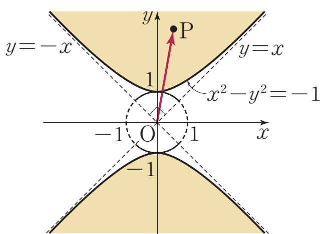


$|2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{AQ}|$
$=\sqrt{5}$

2 정육각형 ABCDEF에서 세 대각선의 교점을 O라고 하면
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AO}$이므로
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|$
$=|6\overrightarrow{AO}|=12$
$|\overrightarrow{AO}|=2$이므로 정육각형의 한 변의 길이는 2이다.



3 $\vec{x}$의 종점을 A라고 하면 $\overrightarrow{OA}$는 $\overrightarrow{OP}$와 방향은 같고 크기가 1인 벡터이다.



쌍곡선 $x^2-y^2=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이므로 점 A는 y축을 기준으로 $\pm\frac{\pi}{4}$만큼의 범위에서 움직인다.

따라서 구하는 도형의 길이는 $\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$

4 $\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=(k-2)\vec{a}+2\vec{b}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$(k-2)\vec{a}+2\vec{b}=t(-\vec{a}-2\vec{b})=-t\vec{a}-2t\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$k-2=-t$, $2=-2t$

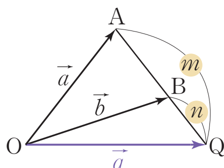
따라서 $t=-1$이므로 구하는 실수 k의 값은 3이다.

2 평면벡터의 성분과 내적

01 평면벡터의 성분 [p. 81~88]

1 $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$

2 (i) $m>n$일 때,



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이고

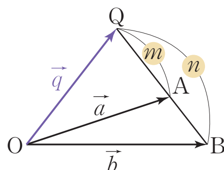
$\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$이므로

$\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}$이므로

$\vec{q}=\vec{a}+\frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

(ii) $m<n$일 때,



$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$이고

$\overrightarrow{BQ}=\frac{n}{n-m}\overrightarrow{BA}$이므로

$\overrightarrow{BQ}=\frac{n}{n-m}(\vec{a}-\vec{b})$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}$이므로

$\vec{q}=\vec{b}+\frac{n}{n-m}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

(i), (ii)에 의하여 $\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

3 (1) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ (2) $-\vec{a}+2\vec{b}$

4 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

무게중심 G의 위치벡터는 $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$이므로

$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}=\vec{a}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}=\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=\vec{c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

따라서 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$이다.

5 (1) $(5,\ -3)$ (2) $(-2,\ 0)$

6 (1) $\sqrt{13}$ (2) 5

7 $l-3=2$에서 $l=5$, $4+k=6$에서 $k=2$이다.

8 (1) $(13,\ -1)$ (2) $(17,\ -29)$

9 $2\vec{a}+2\vec{b}$

10 -1

11 (1) $\overrightarrow{AB}=(3,\ -1)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$
(2) $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 8)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{65}$

창의 up

점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{t}\right)$라고 하면

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\left(2t,\ \frac{4}{t}\right)$

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=\sqrt{4t^2+\frac{16}{t^2}}$

이때 $t^2>0$이므로 $4t^2+\frac{16}{t^2}\ge 2\sqrt{4t^2\times\frac{16}{t^2}}=16$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값은 $\sqrt{16}=4$이다.

02 평면벡터의 내적 [p. 89~96]

1 (1) $6\sqrt{3}$ (2) $6\sqrt{2}$
(3) $-6\sqrt{3}$ (4) -12

2 $10\sqrt{2}$

3 (1) 2 (2) 1

4 3

5 (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

6 3

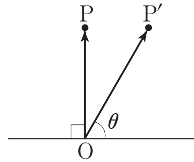
7 (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{6}$

8 $\frac{\pi}{3}$

9 (1) -4 (2) 9

| 단원 과제 |

벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{O'P'}$의 시점을 같게 하면 오른쪽 그림과 같다. 이때 $\overrightarrow{OP'}$이 바닥과 이루는 각의 크기는 θ이므로 두 벡터가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다. 따라서



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{O'P'}|}=\frac{27}{3\sqrt{3}\times 6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

03 직선과 원의 방정식 [p. 97~104]

1 (1) $\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{3}$
(2) $x=-1$
(3) $y=1$

2 (1) $x-6=\frac{y+2}{-3}$
(2) $\frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{-1}$

3 (1) $x+2y-5=0$ (2) $y=1$

4 (1) $2x-3y-18=0$ (2) $x-y-7=0$

5 $\frac{\pi}{6}$

6 (1) $-\frac{1}{3}$ (2) 3

창의 up

오른쪽 그림과 같이 점 H의 좌표를 $(a,\ b)$라 고 하면 점 H는 직선 위의 점이므로

$\frac{a-1}{2}=\frac{b-3}{-1}$

$a+2b=7$ …… ①

직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(2,\ -1)$이고, $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$

$2a-b=-3$ …… ②

①, ②에서 $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{17}{5}$이므로 $\mathrm{H}\left(\frac{1}{5},\ \frac{17}{5}\right)$

한편 $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{6}{5},\ \frac{12}{5}\right)$이므로

$\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

7 (1) $(x+2)^2+(y-3)^2=5$
(2) $(x-4)^2+(y-1)^2=25$

중단원 기초 [p. 105]

1 $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

2 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $|\vec{a}|=\sqrt{13}$
$\vec{b}=(4,\ 0)$, $|\vec{b}|=4$

3 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1
(3) $\frac{3}{4}$ (4) $-\frac{1}{2}$

4 (1) 0 (2) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

5 1

중단원 기본 [p.106]

1 $-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

2 4

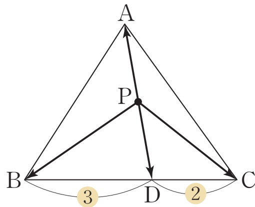
3 $\vec{a}+k\vec{b}=(3,\ 6)+k(1,\ -1)=(k+3,\ -k+6)$
$(\vec{a}+k\vec{b})\perp\vec{c}$이므로 $(\vec{a}+k\vec{b})\cdot\vec{c}=0$
$(k+3)\times1+(-k+6)\times2=0,\ -k+15=0$
따라서 $k=15$

4 $\begin{cases} x=t+3 \\ y=2t-4 \end{cases}$

5 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

중단원 실력 [p.107]

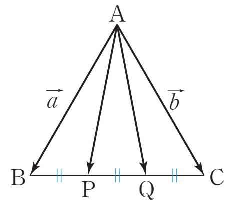
1 $5\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서



$\overrightarrow{PA}=-\frac{3\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PB}}{3+2}$
이므로 선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점을 D라고 하면 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DP}$이므로
점 P는 선분 AD의 중점이다.
$\triangle PAB=\frac{1}{2}\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\triangle ABC=\frac{3}{10}\triangle ABC$
$\triangle PBC=\frac{1}{2}\triangle ABC$
$\triangle PCA=\frac{1}{2}\triangle ADC=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\triangle ABC=\frac{1}{5}\triangle ABC$
따라서 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$의 넓이의 비는
$\frac{3}{10}:\frac{1}{2}:\frac{1}{5}=3:5:2$

2 점 P의 좌표를 $(x,\ x-2)$라고 하면
$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=(2x-3,\ 2x-5)$
$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(2x-3)^2+(2x-5)^2}$
$=\sqrt{8(x-2)^2+2}$
따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값은 $x=2$일 때 $\sqrt{2}$이다.

3 오른쪽 그림과 같이
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$이므로



$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{9}{2}$
한편 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$,
$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$이므로
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{13}{2}$

4 $a=2,\ b=-1$

5 두 접선의 법선벡터는 $\overrightarrow{OA}=(-1,\ \sqrt{5})$, $\overrightarrow{OB}=(a,\ b)$
이고 두 접선이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$이다.
$(-1,\ \sqrt{5})\cdot(a,\ b)=-a+\sqrt{5}b=0,\ a=\sqrt{5}b$
이때 점 B는 원 위의 점이므로 $a^2+b^2=6$에서
$5b^2+b^2=6$이므로 $b=1,\ a=\sqrt{5}$
따라서 $ab=\sqrt{5}$이다.

3 평면 운동

01 속도와 가속도 [p.109~111]

1 (1) 속도: $(2t,\ 3t^2-2)$, 가속도: $(2,\ 6t)$
(2) 속도: $\left(-\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}t,\ \frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t\right)$
가속도: $\left(-\frac{4\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{3}t,\ -\frac{4\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right)$
(3) 속도: $(1-\cos t,\ \sin t)$, 가속도: $(\sin t,\ \cos t)$

2 (1) 속도: $(e^t(\cos t-\sin t),\ e^t(\sin t+\cos t))$
가속도: $(-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t)$
(2) 속력: $\sqrt{2}e^2$, 가속도의 크기: $2e^2$

02 속도와 거리 [p.112~116]

1 (1) $\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t$ (2) 0 (3) $\frac{16}{\pi}$

2 14

3 $\frac{\pi}{2}$

| 단원 과제 |

$\vec{v}=(e^t(\cos 2\pi t-2\pi \sin 2\pi t),\ e^t(\sin 2\pi t+2\pi \cos 2\pi t))$

따라서 점 P가 그리는 곡선의 길이는

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1 e^t\sqrt{1+4\pi^2}dt$$
$$=\sqrt{1+4\pi^2}(e-1)$$

중단원 기초 [p. 117]

1 속도: $(4,\ 2t)$, 가속도: $(0,\ 2)$

2 1

3 $\frac{8}{3}$

4 5π

중단원 기본 [p. 118]

1 속도: $\left(\frac{e^2-1}{2e},\ \frac{e^2+1}{2e}\right)$, 가속도: $\left(\frac{e^2+1}{2e},\ \frac{e^2-1}{2e}\right)$

2 3

3 $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t),\ \frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$이므로

시각 t에서 점 P의 속력은

$\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}=\sqrt{2}e^t$

$\sqrt{2}e^t=\sqrt{2}e^2$에서 $t=2$

4 $\frac{dx}{dt}=6t,\ \frac{dy}{dt}=3t^2-3$이므로 점 P의 속력은

$\sqrt{(6t)^2+(3t^2-3)^2}=3\sqrt{(t^2+1)^2}=3(t^2+1)$

$3(t^2+1)=30$에서 $t^2+1=10,\ t=3$

따라서 구하는 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3(3t^2+3)dt=\Big[t^3+3t\Big]_0^3=36$

5 $e-\frac{1}{e}$

중단원 실력 [p. 119]

1 $x^2+16y^2=1$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면 $y=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$x^2+16y^2=1$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$2x\frac{dx}{dt}+32y\frac{dy}{dt}=0$ ...... ①

시각 t에서 점 P의 속도는 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$이므로

$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{\sqrt{3}}{8},\ \frac{dx}{dt}=3$을 ①에 대입하면

$2\times\frac{1}{2}\times3+32\times\frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{dy}{dt}=0$

$3+4\sqrt{3}\frac{dy}{dt}=0,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

2 $\sqrt{\{-e^{-t}(\sin t+\cos t)\}^2+\{-e^{-t}(\sin t-\cos t)\}^2}$

$=\sqrt{2e^{-2t}}=\sqrt{2}e^{-t}$

따라서 $t=2$에서 점 P의 속력은 $\sqrt{2}e^{-2}$이다.

3 매개변수 방정식으로 고쳐서 생각한다.

$x=t$이면 $y=\frac{1}{12}t^3+\frac{1}{t}$

$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{t^2}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{t^2}\right)^2}=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{t^2}$

따라서

$\int_1^2|\vec{v}|dt=\int_1^2\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\frac{1}{12}t^3-\frac{1}{t}\right]_1^2=\frac{13}{12}$

4 2

대/단/원 평가 문제 [p. 122~123]

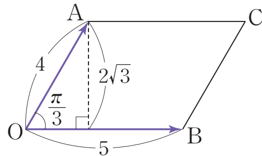
1 ③	2 ③	3 ①	4 ⑤	5 ②
6 ①	7 ②	8 ②	9 ①	10 ②

11 $-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{c}$ 12 $4\vec{a}+\vec{b}$

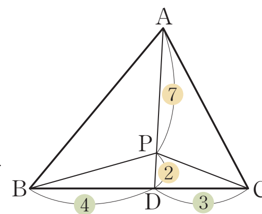
13 $\triangle PAB=40,\ \triangle PBC=20,\ \triangle PCA=30$

14 $\frac{1}{2}$ 15 풀이 참조 16 풀이 참조

5 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=4\times5\times\cos\theta=10$이므로
$20\cos\theta=10$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$
$0\le\theta\le\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$
따라서 오른쪽 그림과 같이 평행사변형의 높이는 $2\sqrt{3}$이 되므로 넓이는
$5\times2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$



13 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서
$-\frac{2}{7}\overrightarrow{PA}=\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{7}$
이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 $4:3$으로 내분하는 점을 D라고 하면
$\overrightarrow{PD}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{PA}$가 된다.
$|\overrightarrow{PD}|=\frac{2}{7}|\overrightarrow{PA}|$이므로 점 P는 $\overline{AD}$를 $7:2$로 내분하는 점이다.
$\triangle PAB=\frac{7}{9}\triangle ABD=\frac{7}{9}\times\frac{4}{7}\triangle ABC=40$
$\triangle PBC=\frac{2}{9}\triangle ABC=20$
$\triangle PCA=\frac{7}{9}\triangle ADC=\frac{7}{9}\times\frac{3}{7}\triangle ABC=30$



15 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$에서 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$
$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
따라서 $\vec{a}\perp\vec{b}$이다.

16 $|\vec{v}|=\sqrt{\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2+\{e^t(\sin t-\cos t)\}^2}$
$=e^t\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\sqrt{2}e^t$
따라서 점 P가 움직인 거리는
$\int_0^\pi|\vec{v}|\,dt=\int_0^\pi\sqrt{2}e^t\,dt=\sqrt{2}\left[e^t\right]_0^\pi=\sqrt{2}(e^\pi-1)$

Ⅲ 공간도형과 공간벡터

준비학습 [p. 129]

1 (1) 모서리 AE, 모서리 BF, 모서리 EH, 모서리 FG
(2) 모서리 AD, 모서리 AE

2 (1) $5\sqrt{2}$ (2) $(2, 5)$ (3) $(-6, -3)$

3 (1) $(x-3)^2+(y-2)^2=16$
(2) $(x-4)^2+(y-3)^2=25$

1 공간도형

01 직선, 평면의 위치 관계 [p. 131~137]

1 최솟값: 1, 최댓값: 4

2 (1) 모서리 AD, 모서리 AE, 모서리 BC, 모서리 BF
(2) 모서리 DC, 모서리 EF, 모서리 HG
(3) 모서리 CG, 모서리 DH, 모서리 HE, 모서리 FG

3 (1) 모서리 AB, 모서리 BC, 모서리 CA
(2) 모서리 AD, 모서리 BE, 모서리 CF
(3) 모서리 DE, 모서리 EF, 모서리 FD

4 (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{3}$

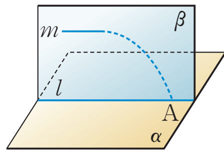
5 (1) 면 AEHD, 면 BFGC
(2) 모서리 AE, 모서리 BF, 모서리 CG, 모서리 DH

6 $\frac{\pi}{2}$

7 (1) 면 ABGF와 면 AFJE
(2) 면 ABCDE, 면 ABGF, 면 CHID, 면 FGHIJ
(3) 면 ABCDE와 면 FGHIJ

8 조건에 의하여 두 직선 l, m은 평면 β 위에 있다.
그런데 $l\,/\!/\,\alpha$이고 직선 m은 평면 α 위에 있으므로 두 직선 l, m은 만나지 않는다.
따라서 $l\,/\!/\,m$이다.

9 $l \,/\!/\, m$이므로 두 직선 l과 m은 한 평면 β를 결정한다.

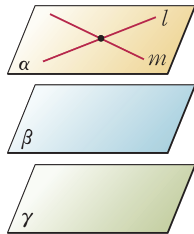


이때 두 평면 α와 β의 교선은 l이다.

평면 α와 직선 m이 평행하지 않다고 가정하면 평면 α와 직선 m은 한 점에서 만난다. 이 점을 A라고 하면 점 A는 두 평면 α와 β의 교선 l 위에 있다. 즉, 점 A는 두 직선 l, m 위에 있으므로 $l \,/\!/\, m$에 모순이다.

따라서 평면 α는 직선 m과 평행하다.

10 평면 α에서 만나는 두 직선 l, m을 그으면 $\alpha \,/\!/\, \beta$이므로



$l \,/\!/\, \beta$, $m \,/\!/\, \beta$ …… ①

그런데 $\beta \,/\!/\, \gamma$이므로 직선 l 또는 m이 평면 γ와 한 점에서 만나면 직선 l 또는 m은 평면 β와도 한 점에서 만나므로 ①에 모순이다.

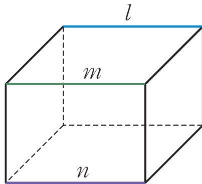
따라서 $l \,/\!/\, \gamma$, $m \,/\!/\, \gamma$이므로 두 직선 l, m을 포함하는 평면 α는 평면 γ와 평행하다.

사고력 기르기

(1) (참)

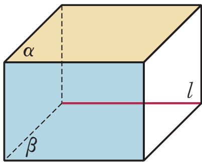
오른쪽 그림에서

$l \,/\!/\, m$, $m \,/\!/\, n \Longrightarrow l \,/\!/\, n$



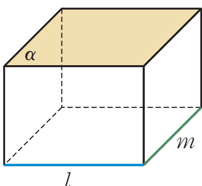
(2) (거짓)

오른쪽 그림에서 윗면을 α, 앞면을 β라고 하면 $l \,/\!/\, \alpha$, $l \,/\!/\, \beta$이지만 $\alpha \perp \beta$이므로 두 평면 α와 β는 평행하지 않다.



(3) (거짓)

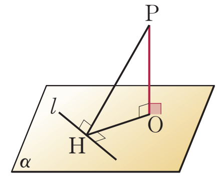
오른쪽 그림에서 윗면을 α라고 하면 $\alpha \,/\!/\, l$, $\alpha \,/\!/\, m$이지만 $l \perp m$이므로 두 직선 l과 m은 평행하지 않다.



02 삼수선의 정리

[p.138~142]

1 $\overline{\text{PH}} \perp l$, $\overline{\text{OH}} \perp l$이므로 직선 l은 평면 PHO와 수직이다.



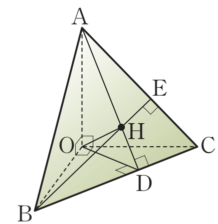
이때 $\overline{\text{PO}}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{\text{PO}} \perp l$이다.

그런데 $\overline{\text{PO}} \perp \overline{\text{OH}}$이고 직선 l과 $\overline{\text{OH}}$는 평면 α 위에 있으므로 $\overline{\text{PO}} \perp \alpha$이다.

따라서 $\overline{\text{PH}} \perp l$, $\overline{\text{OH}} \perp l$, $\overline{\text{PO}} \perp \overline{\text{OH}}$이면 $\overline{\text{PO}} \perp \alpha$

2 $\sqrt{14}$

3 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 E라고 하면



$\overline{\text{OA}} \perp \overline{\text{OB}}$, $\overline{\text{OA}} \perp \overline{\text{OC}}$이므로

$\overline{\text{OA}} \perp$(면 OBC)이고,

$\overline{\text{AD}} \perp \overline{\text{BC}}$이므로 $\overline{\text{OD}} \perp \overline{\text{BC}}$

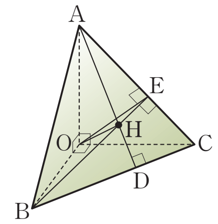
따라서 $\overline{\text{BC}} \perp$(면 ODA)이므로

$\overline{\text{BC}} \perp \overline{\text{OH}}$ …… ①

$\overline{\text{OB}} \perp \overline{\text{OC}}$, $\overline{\text{OB}} \perp \overline{\text{OA}}$이므로

$\overline{\text{OB}} \perp$(면 OCA)이고,

$\overline{\text{BE}} \perp \overline{\text{AC}}$이므로 $\overline{\text{OE}} \perp \overline{\text{AC}}$



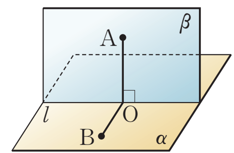
따라서 $\overline{\text{AC}} \perp$(면 OEB)이므로

$\overline{\text{AC}} \perp \overline{\text{OH}}$ …… ②

①, ②에서 $\overline{\text{OH}} \perp$(면 ABC)이다.

4 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 l이라고 하면 $\overline{\text{AO}} \perp l$



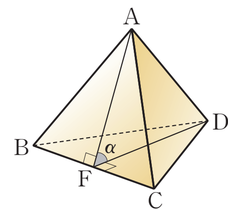
평면 α 위에 $\overline{\text{BO}} \perp l$인 점 B를 잡으면 $\alpha \perp \beta$이므로 $\overline{\text{AO}} \perp \overline{\text{BO}}$

따라서 $\overline{\text{AO}} \perp l$, $\overline{\text{AO}} \perp \overline{\text{BO}}$이므로 $\overline{\text{AO}} \perp \alpha$

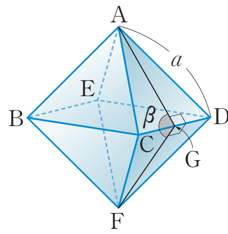
| 단원 과제 |

오른쪽 그림과 같이 정사면체의 이면각의 크기를 α라고 하면 삼각형 AFD에서 삼각형의 성질에 의하여

$\cos \alpha = \dfrac{1}{3}$



오른쪽 그림과 같이 정팔면체의 한 모서리의 길이를 a라 하고, 이면각의 크기를 β라고 하면



$\overline{AG}=\overline{FG}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{AF}=\sqrt{2}a$

삼각형 AFG에서 $\cos\beta=-\frac{1}{3}$

따라서 $\cos\alpha+\cos\beta=0$이므로

$\cos\alpha=-\cos\beta=\cos(\pi\pm\beta)$

$0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$이므로

$\alpha=\pi-\beta$이고 $\alpha+\beta=\pi$

즉, 정사면체와 정팔면체의 이면각의 크기의 합은 π이다.

03 정사영 [p. 143~146]

1 (1) 선분 EG (2) 모서리 BA (3) 삼각형 FHE

2 (1) $3\sqrt{3}$ (2) $\frac{\pi}{4}$

3 $100\sqrt{3}\text{ m}^2$ **4** 15π **5** $\frac{\sqrt{3}}{6}$

중단원 기초 [p. 147]

1 6

2 (1) 면 ADEB, 면 BEFC, 면 ADFC

(2) 면 DEF

3 $5\sqrt{2}$

4 선분 DF의 평면 AEFB로의 정사영은 선분 AF이므로 정육면체 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

중단원 기본 [p. 148]

1 8 **2** $4\sqrt{2}$ **3** $14\sqrt{3}$

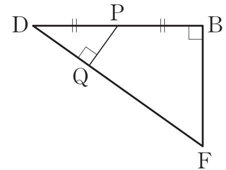
4 2 **5** $\frac{1}{2}$

중단원 실력 [p. 149]

1 $\overline{BF}\perp\overline{AC}$이고, $\overline{BD}\perp\overline{AC}$이므로 $\triangle BDF\perp\overline{AC}$

따라서 점 P는 $\overline{BD}$ 위의 점이므로 사각형 ABCD의 대각선의 교점이다.

삼각형 BDF에서 $\overline{BF}=a$,



$\overline{DP}=\frac{\overline{DB}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\overline{DF}=\sqrt{3}a$

$\triangle BDF\backsim\triangle QDP$이므로

$\frac{\overline{BF}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{DP}}$, $\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\overline{PQ}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$

따라서 $\overline{PQ}=\frac{\sqrt{6}}{6}a$

2 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이고, (면 ABCD)$\perp\overline{DH}$이므로 $\overline{AC}\perp\overline{DH}$

따라서 $\overline{AC}\perp$(면 BHD)이므로

$\overline{AC}\perp\overline{BH}$ …… ①

$\overline{AF}\perp\overline{BE}$이고, (면 ABFE)$\perp\overline{EH}$이므로 $\overline{AF}\perp\overline{EH}$

따라서 $\overline{AF}\perp$(면 BEH)이므로

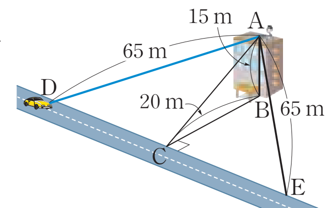
$\overline{AF}\perp\overline{BH}$ …… ②

①, ②에서 $\overline{BH}\perp$(면 AFC)

3 오른쪽 그림에서

$\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{BC}\perp\overline{DE}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC}\perp\overline{DE}$



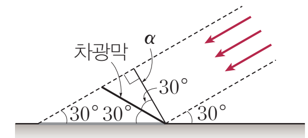
$\overline{AC}=25(\text{m})$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{65^2-25^2}$

$=60(\text{m})$

따라서 리모컨으로 모형 자동차를 조종할 수 있는 도로의 총 길이는 $\overline{DE}=\overline{CD}+\overline{CE}=2\overline{CD}=120(\text{m})$

4 차광막의 평면 α 위로의 정사영은 그림자의 평면 α 위로의 정사영과 같다.



이때 차광막의 넓이를 S, 정사영의 넓이를 S'이라고 하면

$S'=S\cos 30^\circ$ …… ①

또 그림자의 넓이가 12이므로

$S'=12\cos 60^\circ$ …… ②

①, ②에서 $S=4\sqrt{3}$

2 공간좌표

01 공간에서의 점의 좌표 [p. 151~154]

1 (1) $(2,\ 0,\ 0)$ (2) $(2,\ 0,\ 4)$

2 (1) $(3,\ -4,\ 5)$
(2) $(-3,\ 4,\ -5)$
(3) $(-3,\ -4,\ -5)$

3 (1) $\sqrt{5}$ (2) 7 (3) 6 (4) $3|a+b|$

4 (1) $\mathrm{P}\left(0,\ \frac{7}{3},\ 0\right)$ (2) $\mathrm{Q}(1,\ 2,\ 0)$

5 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 8)$ 또는 $\mathrm{C}(0,\ 6,\ 2)$

6 $\sqrt{11}$ km

02 선분의 내분점과 외분점 [p. 155~157]

1 (1) $(2,\ 3,\ 4)$
(2) $(-2,\ -1,\ 0)$
(3) $(0,\ 1,\ 2)$

2 $\sqrt{10}$

3 $\mathrm{C}(4,\ -6,\ 2)$

03 구의 방정식 [p. 158~160]

1 (1) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$
(2) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$
(3) $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6$
(4) $(x-5)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$

2 중심이 $(1,\ -2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 4인 구

3 $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$

4 2

창의 up

점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하면 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=10$이므로
$x^2+y^2+z^2-2x=0$
$(x-1)^2+y^2+z^2=1$
따라서 점 P가 그리는 도형은 중심이 $(1,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 구이다.

| 단원 과제 |

반지름의 길이가 6400이고 중심이 $(a,\ b,\ c)$인 구의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=6400^2$
이 구가 xy평면과 만나서 생기는 원은 $z=0$일 때이므로
$(x-a)^2+(y-b)^2=6400^2-c^2$
이 방정식이 주어진 원의 방정식과 일치하여야 한다.
지구가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은
$(x-1280)^2+(y-1400)^2=(3200\sqrt{3})^2$
즉, $a=1280,\ b=1400,\ c=|3200|$
따라서 구하는 지구의 중심의 좌표는 $(1280,\ 1400,\ -3200)$

중단원 기초 [p. 161]

1 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{D}(4,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{E}(4,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{F}(0,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{G}(0,\ 0,\ 2)$

2 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 9)$

3 점 $\mathrm{R}(a,\ b,\ c)$는 두 점 $\mathrm{P}(-1,\ -2,\ 6)$, $\mathrm{Q}(2,\ 2,\ 6)$의 중점이므로 $\mathrm{R}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 6\right)$
따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=0,\ c=6$이므로 $a+b+c=\frac{13}{2}$

4 (1) $\mathrm{P}(-1,\ 3,\ 1)$
(2) $\mathrm{Q}(11,\ -6,\ 4)$
(3) $\mathrm{M}\left(5,\ -\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

5 (1) $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3^2$
중심은 $(0,\ 1,\ -2)$이고 반지름의 길이는 3
(2) $(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=2^2$
중심은 $(-3,\ 2,\ 0)$이고 반지름의 길이는 2

중단원 기본 [p. 162]

1 $x^2+y^2+z^2-\frac{28}{3}x+2y+\frac{23}{3}=0$

2 $\mathrm{R}(-6,\ 9,\ 12)$

3 $\left(\frac{23}{3},\ \frac{20}{3},\ \frac{17}{3}\right)$

4 8

5 $4\sqrt{2}$

중단원 실력 [p.163]

1 점 $Q(2,\ 4,\ -3)$에서 yz평면에 내린 수선의 발을 Q'이라고 하면 $Q'(0,\ 4,\ -3)$

$\overline{AQ'}=\sqrt{(0-0)^2+(4-1)^2+(-3-1)^2}=5$이고

$\overline{AQ'}-1\le\overline{PQ'}\le\overline{AQ'}+1$이므로 $4\le\overline{PQ'}\le6$

$\overline{PQ}=\sqrt{(\overline{QQ'})^2+(\overline{PQ'})^2}$

이므로 구하는 최솟값은 $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

2 점 A의 zx평면에 대한 대칭점을 A'이라고 하면

$A'(6,\ -2,\ 10)$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\ge\overline{A'B}$ ...... ①

또 점 C의 xy평면에 대한 대칭점을 C'이라고 하면

$C'(8,\ 8,\ -6)$

이때 $\overline{QC}=\overline{QC'}$이므로

$\overline{BQ}+\overline{QC}=\overline{BQ}+\overline{QC'}\ge\overline{BC'}$ ...... ②

①, ②에서 $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}\ge\overline{A'B}+\overline{BC'}$

$\overline{A'B}+\overline{BC'}=20$이므로 구하는 최솟값은 20이다.

3 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{a-4}{3},\ \dfrac{b+10}{3},\ \dfrac{c-8}{3}\right)$

이 점은 xy평면 위의 점이므로 $\dfrac{c-8}{3}=0,\ c=8$

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$(3a+4,\ 3b-10,\ 3c+8)$

이 점은 z축 위의 점이므로 $3a+4=0$에서 $a=-\dfrac{4}{3}$

$3b-10=0$에서 $b=\dfrac{10}{3}$

따라서 $a+b+c=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{10}{3}+8=10$

4 $x^2+y^2+z^2-2ax+2y-2bz+5=0$에서

$(x-a)^2+(y+1)^2+(z-b)^2=a^2+b^2-4$

따라서 주어진 구는 중심의 좌표가 $(a,\ -1,\ b)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+b^2-4}$이다.

이 구가 xy평면에 접하려면 $b^2=a^2+b^2-4$

또 yz평면에 접하려면 $a^2=a^2+b^2-4$

$a>0,\ b>0$이므로 $a=2,\ b=2$

따라서 $a+b=4$

5 평면 α를 xy평면으로 놓고 생각하면 주어진 세 구는 xy평면 위에 있으므로 세 구는 모두 xy평면에 접한다.

따라서 세 구의 중심은 각각 $P(a_1,\ b_1,\ 6)$, $Q(a_2,\ b_2,\ 8)$, $R(a_3,\ b_3,\ 10)$으로 놓을 수 있다.

세 구가 서로 외접하고 모두 xy평면에 접하므로 △PQR의 무게중심에서 xy평면까지의 거리는 △PQR의 무게중심의 z좌표와 같다.

따라서 삼각형 PQR의 무게중심 G와 평면 α 사이의 거리는 $\dfrac{6+8+10}{3}=8$

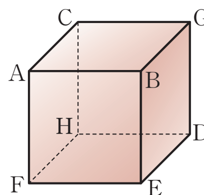
3 공간벡터

01 공간벡터의 뜻과 그 연산 [p.165~169]

1 (1) $\sqrt{13}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{14}$

2 (1) $\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $\vec{c}$ (4) $-\vec{b}$

창의 up



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{HD}$

3 (1) $\vec{b}+\vec{c}$ (2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (3) $\vec{b}-\vec{c}$ (4) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

4 $\sqrt{14}$

5 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG})$

$=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

6 4

02 공간벡터의 성분과 내적 [p.170~177]

1 $\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}$

2 (1) $\overrightarrow{OA}=-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}$ (2) $\overrightarrow{OA}=3\vec{e_1}-4\vec{e_2}$

3 (1) $\vec{a}=(1,\ -3,\ 2)$ (2) $\vec{b}=(-2,\ 0,\ 4)$

4 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{38}$

5 $l=-3,\ m=-7,\ n=2$

6 (1) $(-3,\ -7,\ 5)$ (2) $(1,\ 49,\ -8)$

7 $\left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{10}{3}\right)$

8 (1) $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ 2)$, $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$
(2) $\overrightarrow{AB}=(3,\ -1,\ -5)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{35}$

9 (1) 9 (2) 0

10 (1) 12 (2) 4

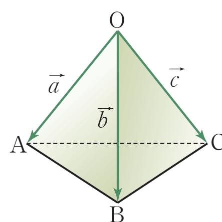
11 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8+(-3)+15=\vec{b}\cdot\vec{a}$
(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-14+(-3)+12=-5$
$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$=\{-8+(-3)+15\}+\{-6+0+(-3)\}=-5$
따라서 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=6+0+(-8)=-2$
$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$=\{-6+0+(-3)\}+\{12+0+(-5)\}=-2$
따라서 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
(3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\{-8+(-3)+15\}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
$\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k\{-8+(-3)+15\}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
따라서 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

12 (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{2}$

13 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $-\frac{2}{5}$

14 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15 오른쪽 그림과 같은 정사면체 OABC에서



$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$이고
$\angle AOB=\angle BOC=\frac{\pi}{3}$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2\cos\frac{\pi}{3}-|\vec{a}|^2\cos\frac{\pi}{3}=0$
따라서 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$이다.

창의 up

$\vec{a}$, $\vec{b}$에 동시에 수직인 벡터를 $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$라고 하면
$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$에서 $x-y+2z=0$ …… ①
$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$에서 $2x+y+z=0$ …… ②
①, ②에서 $y=-x,\ z=-x$
따라서 $\vec{c}=(x,\ -x,\ -x)$이고 $\sqrt{x^2+(-x)^2+(-x)^2}=1$
이므로 구하는 단위벡터는
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이다.

| 단원 과제 |

수소 원자 H_4의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면
$\overrightarrow{H_1H_4}=(a-1,\ b,\ c)$, $\overrightarrow{H_2H_4}=(a,\ b-1,\ c)$,
$\overrightarrow{H_3H_4}=(a,\ b,\ c-1)$
네 개의 수소 원자는 정사면체를 이루므로 세 벡터의 크기는 모두 $\sqrt{2}$이다. 또 벡터의 내적에 의하여
$\overrightarrow{H_1H_4}\cdot\overrightarrow{H_2H_4}=a(a-1)+b(b-1)+c^2=1$ …… ①
$\overrightarrow{H_2H_4}\cdot\overrightarrow{H_3H_4}=a^2+b(b-1)+c(c-1)=1$ …… ②
$\overrightarrow{H_1H_4}\cdot\overrightarrow{H_3H_4}=a(a-1)+b^2+c(c-1)=1$ …… ③
①, ②, ③에서
$a=1,\ b=1,\ c=1$ 또는 $a=-\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=-\frac{1}{3}$
따라서 $H_4(1,\ 1,\ 1)$ 또는 $H_4\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$이다.
한편 네 점 H_1, H_2, H_3, H_4의 위치벡터를 차례로 $\vec{h_1}$, $\vec{h_2}$, $\vec{h_3}$, $\vec{h_4}$라고 하면, 정사면체의 중심에 있는 탄소 원자 C의 위치벡터 $\vec{c}$는 $\vec{c}=\frac{\vec{h_1}+\vec{h_2}+\vec{h_3}+\vec{h_4}}{4}$이다.
따라서 $H_4(1,\ 1,\ 1)$인 경우에 탄소 원자 C의 좌표는
$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

03 직선의 방정식 [p. 178~181]

1 (1) $\frac{x-2}{-5}=y+1=\frac{z-1}{3}$

(2) $x=1,\ y=\frac{z-2}{-1}$

(3) $x=-1,\ z=2$

(4) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$

2 (1) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{5}$ (2) $x-1=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$

3 $\frac{\pi}{6}$

4 (1) 3 (2) $-\frac{1}{2}$

04 평면과 구의 방정식 [p. 182~190]

1 (1) $2x+y-3z+3=0$

(2) $x-3y-2z-1=0$

(3) $z=2$

2 (1) $6x+3y+2z-6=0$

(2) $2x+y+3z-1=0$

(3) $x-y+2z-4=0$

3 $3x-2=\frac{3y+1}{4}=z$

4 (1) $(4,\ 3,\ 3)$ (2) $(-7,\ -1,\ -6)$

5 $\frac{\pi}{4}$

6 (1) $a=4,\ b=-6$ (2) $a=5$

창의 up

직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 이루는 각의 크기를 α라고 하면 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|la+mb+nc|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

따라서 $\sin\theta$의 값을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.

7 (1) $\frac{10\sqrt{11}}{11}$ (2) $\frac{9\sqrt{14}}{14}$

8 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$

9 (1) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=13$

(2) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=21$

중단원 기초 [p. 191]

1 $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

2 -4

3 $\left(\frac{13}{5},\ 0,\ -2\right)$

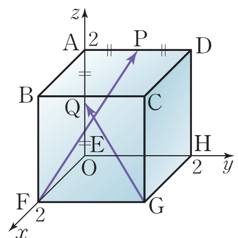
4 0

5 $x-2y+3z-10=0$

중단원 기본 [p. 192]

1 $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

2 꼭짓점 E를 공간좌표의 원점으로 놓고, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EA}$를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 잡으면 F(2, 0, 0), G(2, 2, 0), P(0, 1, 2), Q(0, 0, 1)이므로



$\overrightarrow{FP}=(-2,\ 1,\ 2)$

$\overrightarrow{GQ}=(-2,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{GQ}=(-2)\times(-2)+1\times(-2)+2\times1=4$

3 $\frac{\pi}{4}$

4 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 구의 중심과 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다.

$\frac{|1\times1+1\times1+0\times4-12|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=50$

중단원 실력 [p.193]

1 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OM}$이므로
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}-t\overrightarrow{OM}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{OM}$
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})$, $\overrightarrow{MP}=t\overrightarrow{MA}$ (단, $0\le t\le 1$)
따라서 점 P가 그리는 도형은 선분 AM이므로
$\overline{AM}=\sqrt{3}$

2 점 P의 좌표를 (x, y, z)라고 하자.
$\vec{p}-\vec{a}=(x+1, y-2, z-4)$,
$\vec{p}-\vec{b}=(x-2, y-1, z-3)$
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$
따라서 점 P가 그리는 도형의 겉넓이는
$4\times\pi\times\frac{11}{4}=11\pi$

3 $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}=s$로 놓으면
$x=2s+5$, $y=2s+2$, $z=-s-3$
$\frac{x+3}{4}=\frac{y+7}{5}=\frac{z+4}{3}=t$로 놓으면
$x=4t-3$, $y=5t-7$, $z=3t-4$
두 직선의 교점은 좌표가 각각 같을 때이므로
연립하여 풀면 $s=-2$, $t=1$
따라서 구하는 교점은 $(1, -2, -1)$이다.

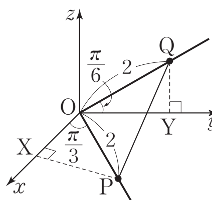
4 평면 α의 법선벡터가 $\vec{n}=(1, -3, 2)$이므로
점 P$(2, -2, 3)$을 지나고, 평면 α에 수직인 직선의 방정식은 $x-2=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{2}$
$x-2=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{2}=t$로 놓으면
H$(t+2, -3t-2, 2t+3)$이고
점 H는 평면 α 위에 있으므로
$(t+2)-3(-3t-2)+2(2t+3)=0$
$14t+14=0$, $t=-1$이므로 H$(1, 1, 1)$이다.

5 $x^2+y^2+z^2=1$은 중심이 $(0, 0, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 구이다. 구의 중심에서 평면 $x+y+z+k=0$까지의 거리를 d라고 하면 $d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\le 1$
즉, $-\sqrt{3}\le k\le\sqrt{3}$일 때 평면이 구와 만나므로 주어진 연립방정식은 해를 가지게 된다.
따라서 k의 최댓값은 $\sqrt{3}$, 최솟값은 $-\sqrt{3}$이다.

대/단/원 평가 문제 [p.196~197]

1 ⑤	2 ④	3 ③	4 ①	5 ③
6 ①	7 ①	8 ③	9 ②	10 ②
11 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	12 51	13 $\frac{\pi}{3}$	14 풀이 참조	
15 풀이 참조				

4 P$\left(2\cos\frac{\pi}{3}, 2\sin\frac{\pi}{3}, 0\right)$,
Q$\left(0, 2\cos\frac{\pi}{6}, 2\sin\frac{\pi}{6}\right)$
즉, P$(1, \sqrt{3}, 0)$, Q$(0, \sqrt{3}, 1)$
이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{2}$



14 A$(x, 0, 0)$, B$(0, y, 0)$, C$(0, 0, z)$라고 하면 세 점 A, B, C는 한 평면 위의 점이므로
$x-9=0$, $2y-9=0$, $2z-9=0$에서
$x=9$, $y=\frac{9}{2}$, $z=\frac{9}{2}$
따라서 A$(9, 0, 0)$, B$\left(0, \frac{9}{2}, 0\right)$, C$\left(0, 0, \frac{9}{2}\right)$이므로
$\overrightarrow{AB}=\left(-9, \frac{9}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(-9, 0, \frac{9}{2}\right)$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=81$

15 구의 중심의 좌표를 P$(0, b, c)$로 놓으면
$\overline{AP}^2=b^2-4b+c^2-8c+36$
$\overline{BP}^2=b^2+4b+c^2-2c+14$
$\overline{CP}^2=b^2-14b+c^2-2c+50$
구의 반지름의 길이는 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $4b+3c=11$
$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서 $b=2$
$b=2$, $c=1$이므로 구하는 구의 반지름의 길이는
$\overline{CP}=\sqrt{0^2+(-5)^2+0^2}=5$

용어

기호

사진 자료 출처

뉴스뱅크 이미지 • • 125쪽

셔터스톡 • • 10쪽, 12쪽, 16쪽, 25쪽, 36쪽, 47쪽, 48쪽, 63쪽, 65쪽, 71쪽, 108쪽, 116쪽, 128쪽, 154쪽, 164쪽, 177쪽, 190쪽, 194쪽

이미지클릭 • • 36쪽

토픽이미지 • • 12쪽, 13쪽, 19쪽, 36쪽, 45쪽, 60쪽, 66쪽, 76쪽, 80쪽, 81쪽, 96쪽, 109쪽, 114쪽, 120쪽, 124쪽, 143쪽, 150쪽, 165쪽

기타 • • 네이버 영화(http://movie.naver.com) – 56쪽

농업박물관(http://www.agrimuseum.or.kr) – 125쪽

부평역사박물관(http://www.bphm.or.kr) – 124쪽

칸딘스키 홈페이지(http://www.wassilykandinsky.net) – 11쪽

온라인 커뮤니티 – 131쪽

픽사(http://www.pixar.com) – 198쪽, 199쪽

20세기폭스코리아(http://www.foxkorea.co.kr) – 57쪽

* 출처를 밝히지 않은 사진 자료의 저작권은 본 출판사에 있습니다.

인용 자료 출처

13쪽, 남호영, 원뿔에서 태어난 이차곡선, 수학사랑, 2001, pp.165~166

19쪽, 2007학년도 교육과정 연구학교 운영 보고서, 부산광역시교육연구정보원, pp.40

25쪽, 남호영, 원뿔에서 태어난 이차곡선, 수학사랑, 2001, pp.186~188

36쪽, 한겨레신문(http://www.hani.co.kr), 2006. 3. 16.

37쪽, 중앙일보(http://joongang.joinsmsn.com), 2004. 2. 18.

45쪽, 디지털타임즈(http://www.dt.co.kr), 2011. 4. 18.

45쪽, 전자신문(http://www.etnews.com), 2011. 11. 27.

62쪽, E. O. Reischauer(조성을 역), 중국 중세사회로의 여행, 한울, 2007

66쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

80쪽, 춘천인형극장(http://www.ccpt.or.kr)

81쪽, 김창수, 테마파크의 이해, 대왕사, 2011, pp.13~49

89쪽, 한국과학창의재단 사이언스올(http://www.scienceall.com)

108쪽, Larson 외 2인, Calculus seventh edition, Houghton Mifflin, 2002, pp.674~678

124쪽, 이광연, 오늘의 수학, 동아시아, 2011, pp.219~226

131쪽, 부산일보(http://www.busan.com), 2012. 8. 14.

143쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

164쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

165쪽, 브리태니커 백과사전(http://www.britannica.co.kr)

198쪽, Tony DeRose 외 2인, Subdivision Surfaces in Character Animation, SIGGRAPH'98 논문집, pp.85~94

집필진

* * 신항균 서울교육대학교 총장
* 이계세 경기도학생교육원 교육연구사
* 박상의 장충고등학교 교사
* 이광연 한서대학교 교수
* 김정화 서울고등학교 교사
* 서원호 청원고등학교 교감
* 박세원 신경대학교 교수
* 박문환 인천인제고등학교 교사
* 전제동 창원중앙고등학교 교사
* 신범영 청담중학교 교감
* 윤정호 대구과학고등학교 교사
* 이동흔 숭문고등학교 교사

* 표시는 집필진 책임자임

인천광역시교육청 인정도서심의회 위원

* 박규흥	서원대학교	김미경	연송고등학교	전효진	가림고등학교	고명호	인천국제고등학교
정옥경	인천신현고등학교	이재성	인천공항고등학교	윤효진	인천고등학교	차요섭	인천대건고등학교
김동수	신명여자고등학교	배혜정	옥련여자고등학교	오경민	학익고등학교	김현희	인일여자고등학교
정미라	제물포고등학교	임병태	영종국제물류고등학교	김종오	광성고등학교	신선희	인천청라고등학교
최중근	인천초은고등학교	이종현	작전여자고등학교	이선희	문일여자고등학교	고아라	부평고등학교
이진	세일고등학교	강신석	인천과학고등학교	유경민	연수여자고등학교	박숭열	인천예일고등학교
양재원	인천영선고등학교	김희경	도림고등학교	우연희	서운고등학교	김성식	부광여자고등학교
양혜순	인천부흥고등학교	윤세정	부광고등학교	이혜연	백석고등학교	최미희	작전고등학교
권태룡	동인천고등학교	류주현	부평여자고등학교	박은희	연수고등학교	김기선	인천광성중학교
김현옥	신송고등학교	김윤정	인천국제고등학교	조영식	인천부흥고등학교	홍지연	인천신현고등학교
민선애	인천공항고등학교	김진영	인천진산과학고등학교	신은주	인일여자고등학교	고현숙	학익여자고등학교
권봉희	인천송천고등학교	장은하	부개여자고등학교	김성래	광성고등학교	문서영	인천청라고등학교
서순옥	인천예술고등학교	박진상	인천외국어고등학교	함유선	인천여자고등학교	최윤호	연수고등학교
김윤수	검단고등학교	박영경	세일고등학교	박종호	안남고등학교	안현태	강화고등학교
안유진	인천진산과학고등학교	이재정	인천남동고등학교	문정연	연수여자고등학교	김장회	인천예일고등학교
유영신	인천상정고등학교	조성현	인천원당고등학교	임승희	인제고등학교	이주영	인천송천고등학교
배수아	인천산곡고등학교	김복수	송도고등학교	이대성	부광고등학교	고석구	건국대학교
박제남	인하대학교	정문자	수원대학교	이재원	금오공과대학교	류희수	경인교육대학교
오흥준	초당대학교	이종성	인하대학교	조규근	명지대학교	오종철	군산대학교
배재형	경희대학교	김병학	경희대학교	이재혁	이화여자대학교	이동환	부산교육대학교
김성기	계산고등학교	김대흥	신송고등학교	김경선	인천가정고등학교	박용회	계산고등학교
전경환	인하대학교사범대학 부속고등학교	허석	부개고등학교	윤기운	인천여자고등학교	고일석	계양고등학교
서동희	인천고잔고등학교	박희성	인천영종고등학교	한경호	학익여자고등학교	김혜경	검단고등학교
조준호	인명여자고등학교	성미애	부개여자고등학교	최항철	인천국제고등학교		

* 표시는 심의회 위원장임

인천광역시교육청 인정도서 감수 위원

* 신준국	충남대학교	고성은	건국대학교	김구	재현고등학교	노석태	계남고등학교
류현아	계명대학교	문명호	건국대학교	박근덕	사내고등학교	박지현	반포고등학교
박찬석	우신고등학교	백상숙	영주여자고등학교	서정인	잠일고등학교	송윤호	백암고등학교
송정민	금호고등학교	안재현	충남대학교	양태석	진주고등학교	오민정	강일고등학교
유영주	개포고등학교	유인윤	청원고등학교	윤대원	경상대학교	윤장노	신성고등학교
이동일	서울여자대학교	이문석	백양고등학교	정승달	제주대학교	조왕구	안산고등학교
진대호	동국대학교	허업	신정고등학교	홍성일	대전대신고등학교		

* 표시는 감수 위원 책임자임

만든 사람들

개발 책임 김영호
편집 김경수, 윤준원, 천세규, 최윤정, 김은빛, 이유희
표지 디자인 김의수
본문 디자인 박현신
삽화 김성남
컷 맥컴

인천광역시교육청에서 2013년 8월 30일 인정 승인을 하였음.

고등학교 기하와 벡터

2014. 3. 1. 초판 발행 2015. 3. 1. 2쇄 발행 정가 원

지은이: 신항균 외 11인
발행인: (주)지학사 서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인: (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43

이 교과서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있는 분은 한국교과서연구재단이 운영하는 **교과서민원바로처리센터**(전화 1566-8572, 누리집 주소 http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

내용 관련 문의: (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의: (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행: 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내: 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서

ISBN 978-89-05-04016-1 53410



고|등|학|교 기하와 벡터



ISBN 978-89-05-04016-1